MATHEMATISCHE GRUNDLAGEN DER QUANTENMECHANIK

W. Bulla
Schriftsatzgestaltung: Martina Jörgler

Schrifttum

Einführende und grundlegende Bücher

- J. v. Neumann: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik; Grundlehren der math. Wissensch. Bd. 38, Springer, Berlin, 1968 (1932).
- E. Prugovečki: Quantum mechanics in Hilbert space; Academic Press, London, 1971.
- Ph. Blanchard, E. Brüning: Distributionen und Hilbertraumoperatoren. Mathematische Methoden der Physik. Springer, Wien, 1993
- H. Fischer/H. Kaul: Mathematik für Physiker, Bd 2. Teubner, Stuttgart, 1998, 2. A. 2004
- W.O. Amrein: Non-relativstic quantum dynamics; Reidel,Dordrecht, 1981.
- J.M. Jauch: Foundations of quantum mechanics; AddisonWesely, London, 1968.
- R. Jost: Quantenmechanik I,II; Verlag der Fachvereine an der ETH Zürich, 1969, 1973.
- W.Thirring: Lehrbuch der mathematischen Physik, Bd. 3: Quantenmechanik von Atomen und Molekülen, Springer, Wien, 1979.

Vorlesungsunterlage:

- S. Großmann: Funktionalanalysis (I,II), Studientext; Aula-Verlag, Wiesbaden, 1988

Teil I
Einleitung

1 Kurze Begründung für das Auftreten von Schwierigkeiten und neuartigen Fragestellungen in der Mathematik der QM

Ein wesentlicher Bestandteil des Formalismus der QM ist die zeitfreie Schrödingergleichung $H\psi = E\psi$, die eine Eigenwertgleichung für einen linearen Operator in einem linearen Raum ist und zur Bestimmung der Energiewerte dient. Da erfahrungsgemäß schon bei gebundenen Systemen unendlich viele verschiedene Energiewerte auftreten können, muß man Operatoren verwenden, die unendlich viele Eigenwerte haben können, was nur in unendlichdimensionalen Räumen möglich ist. Der in der QM verwendete lineare Raum ist also notwendig unendlichdimensional.

Die unendliche Dimension ist der Grund für die wesentlichen Unterschiede zur endlichdimensionalen Analysis.

In fast allen physikalisch wichtigen mathematischen Gebieten tritt eine Verbindung von algebraischen und topologischen Strukturen auf.

Algebraische Struktur: Besteht aus den Verknüpfungen in den vorliegenden Mengen: Körpereigenschaft der reellen und komplexen Zahlen, Addition und Skalarmultiplikation im Vektorraum, usw.

Topologische Struktur: Ermöglicht die Defintion von Stetigkeit und Grenzwert und damit erst Analysis wie Differentialrechnung, Integration. Eine solche Struktur ist durch die Angabe aller jener Teilmengen festgelegt, die in dieser Topologie offene Mengen sind.

Im endlichdimensionalen $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist die Topologie durch die über das Skalarprodukt gegebene Metrik bestimmt. Die zur Definition von Grenzwerten in endlichdimensionalen Räumen und der Stetigkeit von Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Räumen notwendigen Kugelumgebungen werden durch endliche Summen beschrieben, in denen keine Konvergenzprobleme auftreten. Außerdem ist in diesen Räumen nur eine separierte Topologie möglich, die mit deren algebraischer Struktur im folgenden Sinne verträglich ist:
Allgemein gilt für alle Paare topologischer Räume X, Y, daß auch $X \times Y$ in eindeutiger Weise zu einem topologischen Raum gemacht werden kann. Es sei nun X ein linearer Raumüber $\mathbb{K}$ und außerdem ein topologischer Raum. Die Veträglichkeit von linearer und topologischer Struktur bedeutet, daß man verlangt, daß die beiden durch die lineare Struktur gegebenen Abbildungen

$$\begin{aligned} + : X \times X \to X \quad & (x, y) \mapsto x + y \\ \cdot : \mathbb{K} \times X \to X \quad & (\alpha, y) \mapsto \alpha \cdot y \end{aligned}$$

stetig sein sollen, wobei die Topologie auf $\mathbb{K}$ die übliche auf $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist.
Das heißt, daß im Endlichdimensionalen gar keine Wahlmöglichkeit für sie besteht und der anschauliche Grenzwerts- und Stetigkeitsbegriff mit dem Raum mitgeliefert wird. Lineare Abbildungen zwischen solchen Räumen können immer auf dem ganzen Raum definiert werden, sind immer stetig und in einem gewissen Sinne beschränkt. Man braucht daher in der linearen Analysis auf solchen Räumen topologische Fragen meist gar nicht getrennt zu behandeln, da keine besonderen Schwierigkeiten auftreten.

In unendlichdimensionalen Räumen treten erhebliche Abweichungen vom obigen Fall auf. Ganz allgemein wird hier eine Topologie durch die obige Verträglichkeitsforderung und die Separiertheit keineswegs eindeutig festgelegt. Ferner ist zum Beispiel in einem unendlichdimensionalen normierten Raum die abgeschlossene Einheitskugel nicht kompakt. Es gibt also eine abgeschlossene und beschränkte Menge, die nicht kompakt ist. Vgl. hiezu im $\mathbb{R}^n$ den Überdeckungssatz von Heine-Borel. Weiters müssen selbst in jenen unendlichdimensionalen Räumen, die noch am ehesten den endlichdimensionalen euklidischen ähneln, nämlich den Hilberträumen, lineare Abbildungen nicht stetig und nicht überall definierbar oder definiert sein. Das heißt, sie sind keine Abbildungen des Hilbertraumes $\mathfrak{H}$ in sich, da eine Abbildung immer auf der ganzen Menge definiert ist, sondern nur Abbildungen von Teilmengen von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$. Solche Abbildungen heißen im folgenden Operatoren. So sind zum Beispiel der Orts- und der Impulsoperator nicht überall definiert. Wegen der von den einzelnen Operatoren abhängenden Definitionsbereiche kann man Operatoren nicht so unbekümmert verknüpfen wie überall definierte Funktionen.

Diese Umstände bringen es mit sich, daß ein Eigenwertproblem für „hermitesche“ Operatoren zum Unterschied vom endlichdimensionalen Fall nicht in einfacher Erweiterung notwendig auf abzählbar viele diskrete Eigenwerte mit zugehörigen normierbaren Eigenvektoren führt, die ein vollständiges Orthonormalsystem bilden. Aber es genügt nicht einmal, Stetigkeit der Operatoren zu fordern, sondern man muß noch stärkere Einschränkungen auferlegen (Vollstetigkeit), damit ein diskretes Eigenwertspektrum gesichert ist.

2 Zusammenstellung einiger Behauptungen aus der „naiven“ QM, die als allgemeingültige Aussagen falsch sind:

- ein Operator führt jeden Vektor des Hilbertraumes in einen anderen über.
  Falsch wegen der Möglichkeit eingeschränkter Definitionsbereiche.

- Für zwei Operatoren A, B, läßt sich immer ihre Summe definieren. Die Operatoren bilden eine Algebra. (Blochinzew, S. 72)
  Falsch, da die Summe nur auf dem Durchschnitt der Definitionsbereiche erklärt werden kann durch $(A + B)f = Af + Bf$, und dieser Durchschnitt nur das Nullelement zu enthalten braucht.

- Die Vertauschungsbeziehung für Koordinaten- und Impulsoperator lautet: $[P, Q] = \frac{\hbar}{i} I$
  Falsch, da I ein überall definierter Operator ist, P und Q dies aber nicht sind und daher auch nicht die in den VTB gegebene Verknüpfung. Richtig ist, daß $[P, Q]$ auf

einer gewissen Teilmenge mit $\frac{\hbar}{i} I$ übereinstimmt. (Gleichheit von Operatoren bedeutet auch Gleichheit ihrer Definitionsbereiche!)

- Jeder Messgröße entspricht ein hermitescher Operator, der ein System von reellen Eigenwerten mit zugehörigem orthonormalem Eigenvektorsystem besitzt, nach dem man jede Lösung der Schrödingergleichung entwickeln kann.
  Außer "reell" ist im allgemeinen alles falsch. Zur Nichtexistenz eines diskreten Spektrums siehe früher, zu einem stetigen ("kontinuierlichen") Spektrum gehören keine Eigenvektoren. Nur wenn ein nicht notwendig vollstetiger Operator ein rein diskretes Spektrum hat und selbstadjungiert ist, sind die zugehörigen Eigenvektoren vollständig.

- Man kann ein beliebiges Orthonormalsystem wählen und jedem Operator eine Matrix zuordnen, man rechnet dann mit Operatoren wie mit Matrizen.
  Falsch. Das beliebig gewählte Orthonormalsystem muß nicht im Definitionsbereich eines beliebig gewählten Operators liegen, schon gar nicht im Durchschnitt der Definitionsbereiche aller betrachteten Operatoren.

Ferner bedeuten die Verknüpfungen von Operatoren untereinander oder das Anwenden auf Vektoren (unendliche Folgen) die Bildung von unendlichen Reihen, die nicht zu konvergieren brauchen. Es gibt zwar zu jedem abgeschlossenen symmetrischen Operator eine Matrixdarstellung mit zugehörigem Orthonormalsystem, doch ist eine unitäre Transformation auf ein beliebiges anderes ONsystem im allgemeinen nicht zulässig, da die neue Matrix selbst bei Konvergenz der entsprechenden Reihen nicht die Bedingungen für die Darstellung eines solchen Operators erfüllen muß. (S. Achieser/Glasmann: Theorie der linearen Operatoren im Hilbertraum, S. 133) Die Matrixdarstellung unbeschränkter Operatoren ist zu ihrer Untersuchung und Handhabung nicht sehr geeignet. Man kann zwar unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen, die in wichtigen Anwendungsfällen erfüllt sind, Matrixdarstellungen gewisser Klassen von unbeschränkten Operatoren erhalten und auch die Operatorverknüpfungen durch die üblichen Matrixverknüpfungen darstellen, doch sind nach wie vor nicht alle Basen und daher auch nicht alle unitären Transformationen zulässig, das Verfahren ist problemabhängig. (Epifanio, J.M.P. 17, 1688 (1976); ds., Trapani, C.: J.M.P. 20, 148 (1979), H. Miglbauer: Kap. 3.5 in: H. Miglbauer; G. Reiter: Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Kapitel 3 des Skriptums zur Quantenmechanik-Grundvorlesung)

Beispiel: Kritik an der "naiven" Behandlung des Impulsoperators, z.B. nach Blochinzew, Grundlagen der QM, 4. Aufl. 1963, S. 70f. Dort wird aufgrund des folgenden "Beweises" behauptet, daß der **p**-Operator linear und selbstadjungiert sei:

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_1^* \ \mathbf{p} \ u_2 dx &= -i\hbar \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_1^* \ \frac{du_2}{dx} dx = \\ [-i\hbar u_1^* \ u_2]\Big|_{-\infty}^{+\infty} + i\hbar \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_2 \ \frac{du_1^*}{dx} dx &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_2 \ (\mathbf{p} \ u_1)^* dx \end{aligned}$$

Bemerkungen: Es wird durch das Ergebnis dieses Beweises nicht gezeigt, daß **p** selbstadjungiert ist, sondern nur, daß er hermitesch ist, was nicht dasselbe ist. Der Beweis ist nicht stichhältig, da das Verschwinden von $u_1^* \; u_2|_{\pm\infty}$ nicht ohne weiteres klar ist. Vgl. dazu Blanchard/Brüning, op. cit., S. 168u, Bmkg 2: Dort ist ein Beispiel einer auf $\mathbb{R}^1$ definierten, reellen, stetigen Funktion mit folgenden Eigenschaften angegeben:

1. $u(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
2. $u^2(x)$ nicht beschränkt auf $\mathbb{R}$;
3. $\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)dx < \infty$

- Die Eigenvektoren des Ortsoperators Q sind $f_{x'}(x) = \delta(x - x')$.
  Falsch, denn dies sindüberhaupt keine und schon gar keine quadratintegrablen Funktionen.

Teil II
Einführung in die Theorie des Maßes und des Integrals

Schrifttum: E. Henze: Einführung in die Maßtheorie, BI-Wissenschaftsverlag,1985

1 Grundbegriffe der Maßtheorie

Die Integration von Funktionen ist ein Verfahren, mit dem man geeigneten Funktionen eine Zahl zuordnen kann. Dazu müssen diese Funktionen auf einer Menge definiert sein, in der ein Rauminhalt erklärt ist, das ist eine Zuordnung von nichtnegativen Zahlen zu einer ausreichenden Klasse von Teilmengen des Definitionsbereiches. Demgemäß werden zunächst die notwendigen Mengensysteme vorgestellt, und dann wird die axiomatische Definition des Rauminhaltes (Maßes) gegeben.

1.1 Mengensysteme

Im folgenden werden verschiedene Systeme von Untermengen einer Menge X betrachtet, die gegenüber gewissen mengentheoretischen Verknüpfungen abgeschlossen sind.

Bezeichnung und Definition der Mengendifferenz: $A \setminus B := A \cap \mathbf{C}B$

Definition 1 $\mathfrak{R}$ *ist ein* Ring*, wenn gilt*

$$1.)(A \in \mathfrak{R}) \wedge (B \in \mathfrak{R}) \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{R} \tag{1}$$
$$2.)(A \in \mathfrak{R}) \wedge (B \in \mathfrak{R}) \Rightarrow A \setminus B \in \mathfrak{R} \tag{2}$$

Es folgt:

$$a) \quad \emptyset \in \mathfrak{R} \quad \text{da} \quad A \setminus A \in \mathfrak{R} \tag{3}$$
$$b) \quad (A \in \mathfrak{R}) \wedge (B \in \mathfrak{R}) \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{R}, \quad \text{da } A \cap B = (A \cup B) \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) \tag{4}$$

Definition 2 *Eine* Mengenalgebra $\mathfrak{A}$ *ist ein Ring, der die Grundmenge X enthält.*

Damit gleichwertig ist die

Definition 3 $\mathfrak{A}$ *ist eine* Mengenalgebra*, wenn gilt:*

$$1.)(A \in \mathfrak{A}) \wedge (B \in \mathfrak{A}) \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A} \tag{5}$$
$$2.)(A \in \mathfrak{A}) \Rightarrow \mathbf{C}A \in \mathfrak{A}, \;\; da\, \mathbf{C}A = X \setminus A \tag{6}$$

Definition 4 *Eine* σ-Algebra $\mathfrak{A}_\sigma$ *ist eine Algebra, in der gilt:*

$$(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A}_\sigma) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}_\sigma \tag{7}$$

Es folgt:

$$(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{A}_\sigma) \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}_\sigma \tag{8}$$

wegen der de Morganschen Regel $\mathbf{C}\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{C}A_i$

Definition 5 *Ein Paar* $(X, \mathfrak{A}_\sigma)$ *heißt Messraum, die Elemente von* $\mathfrak{A}_\sigma$ *messbare Mengen.*

Satz 1 *Zu jedem System* $\mathfrak{N}$ *von Teilmengen von* X *gibt es genau einen Ring* $\mathfrak{R}(\mathfrak{N})$*, eine Algebra* $\mathfrak{A}(\mathfrak{N})$ *und eine* σ*-Algebra* $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{N})$*, die* $\mathfrak{N}$ *enthalten und die in jedem anderen gleichartigen System enthalten ist, das* $\mathfrak{N}$ *enthält, die also die kleinsten derartigen Systeme sind. Man nennt sie die von* $\mathfrak{N}$ *erzeugten Systeme.*

1.2 Inhalt und Maß

Da von nun an auch Funktionen im weiteren Sinne betrachtet werden, die die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen können, werden folgende Vereinbarungen getroffen:
$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$; $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_{+,0} \cup \{\infty\}$, wobei $\mathbb{R}_{+,0} := \{x \,|\, x \geq 0\}$, ferner $0 \cdot \infty = 0$, $0 \cdot (-\infty) = 0$.

1.2.1 Mengenfunktionen

Definition 6 *Eine auf einem nichtleeren Mengensystem* $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}(X)$ *definierte Abbildung*

$$n : \mathfrak{N} \to \overline{\mathbb{R}},$$

die von den beiden Werten $+\infty$, $-\infty$ *höchstens einen annimmt, heißt Mengenfunktion.*

Definition 7 *Eine auf einem Ring oder einer Algebra erklärte nichtnegative Mengenfunktion* $m : \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *heißt Inhalt, wenn gilt:*

$$\begin{aligned} &1.) m(\emptyset) = 0 \\ &2.) (A \in \mathfrak{R}) \wedge (B \in \mathfrak{R}) \wedge (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow m(A \cup B) = m(A) + m(B) \end{aligned} \tag{9}$$

Definition 8 *Ein Inhalt heißt* σ*-additiv, wenn für alle* $\{A_i\}$*, die die Voraussetzungen erfüllen, gilt:*

$$(\bigwedge_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}) \wedge (\bigwedge_{i\neq k} A_i \cap A_k = \emptyset) \wedge (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{R}) \Rightarrow m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) \tag{10}$$

Definition 9 *Ein* Maß μ *ist ein auf einer* σ*-Algebra erklärter* σ*-additiver Inhalt. In diesem Falle sind die in der Definition der* σ*-Additivität geforderten abzählbaren Vereinigungen immer vorhanden (in* $\mathfrak{A}_\sigma$ *).*

Eine Menge A heißt von endlichem Maß, wenn $\mu(A) < \infty$ ist.

Definition 10 *Ein Tripel* $(X, \mathfrak{A}_\sigma, \mu)$ *heißt Maßraum. Gilt insbesondere* $\mu(X) = 1$*, dann heißt* μ *Wahrscheinlichkeitsmaß und der zugehörige Maßraum Wahrscheinlichkeitsraum.*

Definition 11 *Eine Eigenschaft gilt fast überall (f.ü.) auf* X*, wenn sie auf einer Menge* M *mit* $\mu(\mathbf{C}M) = 0$ *gilt.*

Definition 12 *Eine Mengenfunktion* $M : \mathfrak{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *heißt* äußeres Maß*, wenn gilt*

$$\begin{aligned} &1.) M(\emptyset) = 0 \\ &2.) (A \subset B) \Rightarrow M(A) \leq M(B) \\ &3.) M(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{1}^{\infty} M(A_i) \end{aligned} \tag{11}$$

Definition 13 *Eine Menge* $A \in \mathfrak{P}(X)$ *heißt* M*-messbar, wenn gilt*

$$\bigwedge_{B \in \mathfrak{P}(X)} M(B) = M(A \cap B) + M(\mathbf{C}A \cap B) \tag{12}$$

Satz 2 *Alle* M*-messbaren Mengen bilden eine* σ*-Algebra, die Einschränkung von* M *auf sie ein Maß.*

1.2.2 Fortsetzung von Inhalten zu Maßen

Es liegt häufig die Aufgabe vor, eine Mengenfunktion, die schon gewisse Eigenschaften eines Maßes hat, aber nur auf einem Ring oder einer Algebra erklärt ist, zu einem Maß auf der vom Ausgangssystem erzeugten σ-Algebra fortzusetzen. So verwendet man zur Bildung des Riemann-Integrals von Funktionen auf dem $\mathbb{R}^n$ den Rauminhalt von achsenparallelen Quadern im $\mathbb{R}^n$, der zu einem Inhalt auf dem von ihnen erzeugten Ring Anlaß gibt. Es erhebt sich die Frage, ob dieser Inhalt zu einem Maß fortgesetzt werden kann, das dann seinerseits zur Grundlage eines allgemeineren Integralbegriffes gemacht werden kann. Sie ist zu bejahen, wie im folgenden gezeigt wird.

Für einen Ring ist hiebei die monotone Erreichbarkeit von X Voraussetzung:

Definition 14 X *heißt durch Mengen aus* $\mathfrak{R}$ *monoton erreichbar, wenn gilt*

$$X = \lim_i A_i := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \quad \mathit{mit} \bigwedge_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \mathfrak{R}, \mathit{wobei}\ (i < j) \Rightarrow A_i \subset A_j \tag{13}$$

Bsp.: $X = \mathbb{R}^n$
$\mathfrak{F}_n$, die Menge der n-dimensionalen Quaderaggregate, bestehe aus allen endlichen Vereinigungen von achsenparallelen halboffenen Quadern der Art $Q = \{x | a_i < x_i \leq b_i\}$. $\mathfrak{F}_n$ ist ein Ring. Der Rauminhalt eines Quaders $m(Q) = \prod_1^n (b_i - a_i)$ definiert einen Inhalt auf ganz $\mathfrak{F}_n$, da alle dazugehörenden Mengen als punktfremde Vereinigungen von solchen Quadern dargestellt werden können und ihr Inhalt als Summe der Inhalte der Bestandteile erklärt wird. Wie man zeigt, ist dieser Inhalt σ-additiv. Außerdem ist $\mathbb{R}^n$ aus $\mathfrak{F}_n$ monoton erreichbar.

Es sei nun $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R})$ die von $\mathfrak{R}$ erzeugte σ-Algebra und X sei monoton erreichbar. Falls man statt von $\mathfrak{R}$ gleich von einer gegebenen Algebra ausgeht, gehört X überhaupt schon zu ihr.

Auf $\mathfrak{R}$ oder $\mathfrak{A}$ sei ein σ-additiver Inhalt m erklärt. Dann gilt der

Satz 3 *(Fortsetzungssatz):*
Die Mengenfunktion

$$M(A) := \inf_{\{S_k\}} \{\sum_1^\infty m(S_k) \mid (\bigcup_1^\infty S_k \supset A) \wedge (\bigwedge_{k \in \mathbb{N}} S_k \in \mathfrak{R} \ (bzw\ \mathfrak{A})\} \tag{14}$$

ist ein äußeres Maß auf $\mathfrak{P}(X)$. Ihre Einschränkung auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R})$ ist dort ein Maß, das auf $\mathfrak{R}$ mit m übereinstimmt. Ist X als Vereinigung abzählbar vieler Mengen endlichen Inhalts darstellbar, dann ist diese Fortsetzung eindeutig.

Bsp.: Der Ring $\mathfrak{F}_n$ erfüllt alle Voraussetzungen des Satzes 3, also existiert ein Maß auf $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{F}_n) =: \mathfrak{B}_n$, der Borelschen σ-Algebra aller Borel-Mengen. Da die letzte Bedingung in Satz 3 ebenfalls erfüllt ist, ist die Fortsetzung eindeutig. Sie heißt das Borel-Lebesgue-Maß μ_n. $\mathfrak{B}_n$ ist sehr umfassend, so gehören alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen dazu. Es gilt sogar, daß $\mathfrak{B}_n$ von den offenen Mengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugt wird. (Dies ist für beliebige topologische Räume die Definition der zu einer Topologie, also zur Menge der offenen Mengen gehörigen Borelschen σ-Algebra.)

Definition 15 *Ein Maß heißt vollständig, wenn gilt*

$$\bigwedge_{A \subset B} (B \in \mathfrak{A}_\sigma) \wedge (\mu(B) = 0) \Rightarrow A \in \mathfrak{A}_\sigma \tag{15}$$

Daraus folgt: $\mu(A) = 0$.

Satz 4 *Die Einschränkung eines äußeren Maßes nach Satz 2 bildet auf den M-messbaren Mengen ein vollständiges Maß.*

Das nach Satz **??** erhaltene Maß ist im allgemeinen nicht vollständig, doch kann man $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{R})$ zur σ-Algebra der M-messbaren Mengen erweitern, auf der die Einschränkung von M dann nach Satz **??** vollständig ist.

So ist zum Beispiel auch das nach Satz **??** erhaltene Borel-Lebesgue-Maß μ_n auf $\mathfrak{B}_n$ nicht vollständig, die Vervollständigung nach Satz **??** heißt Lebesgue-Maß.

1.2.3 Produktmaße

Dieser Abschnitt ist eine Anwendung des Fortsetzungsatzes **??**. Es sei ein n-tupel von Maßräumen gegeben: $(X_i, \mathfrak{A}_{\sigma i}, \mu_i), 1 \leq i \leq n$.

Man bildet

$$\prod_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_{\sigma i} := \mathfrak{A}_{\sigma 1} \times \cdots \times \mathfrak{A}_{\sigma n} = \{ \bigtimes_{1}^{n} A_i \mid A_i \in \mathfrak{A}_{\sigma i}\} \tag{16}$$

Dann kann man zeigen: Das System aller Vereinigungen von endlich vielen Mengen aus $\Pi\mathfrak{A}_{\sigma i}$ bildet eine Algebra $\mathfrak{A}(\Pi\mathfrak{A}_{\sigma i})$, sie fällt mit der Menge paarweise fremder Vereinigungen von Mengen aus $\Pi\mathfrak{A}_{\sigma i}$ zusammen. Ferner kann man auf $\mathfrak{A}(\Pi\mathfrak{A}_{\sigma i})$ einen Inhalt erklären durch

$$\mu(\bigtimes_{1}^{n} A_i) = \mu(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_i \mu_i(A_i) \tag{17}$$

μ ist damit auf $\prod \mathfrak{A}_{\sigma\, i}$ erklärt, auf $\mathfrak{A}(\prod \mathfrak{A}_{\sigma\, i})$ wird es durch Summenbildung fortgesetzt, und zwar über die Darstellung jeder Menge dieser Algebra als Vereinigung paarweise punktfremder Produktmengen. Nach dem Fortsetzungssatz 3 gibt es ein Maß auf der von den Produktmengen erzeugten σ-Algebra $\mathfrak{A}_\sigma(\prod \mathfrak{A}_{\sigma\, i})$. Es heißt das Produktmaß. Seine Eindeutigkeit erfordert gewisse Voraussetzungen für die Faktorräume.

Bsp.: Das Lebesgue-Maß im $\mathbb{R}^n$ läßt sich als Produkt von n Maßen auf $\mathbb{R}$ auffassen.

2 Integrationstheorie

2.1 Messbare Funktionen

Definition 16 *Eine reelle Funktion, die auf einem Messraum $(X, \mathfrak{A}_\sigma)$ erklärt ist, heißt messbar, wenn gilt*

$$\bigwedge_{B \in \mathfrak{B}_1} f^{-1}(B) \in \mathfrak{A}_\sigma$$

Es sind auch messbare Funktionen im weiteren Sinne zugelassen, die die Werte $+\infty, -\infty$ annehmen können. Dann müssen auch $f^{-1}(+\infty)$ und $f^{-1}(-\infty)$ messbare Mengen sein. Da $\mathfrak{B}_1$ von den offenen Intervallen in $\mathbb{R}^1$ erzeugt wird, gibt es die gleichwertige

Definition 17 *Eine auf einem Messraum erklärte reelle Funktion f heißt messbar, wenn für jedes offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gilt*

$$f^{-1}(I) = \{x | f(x) \in I\} \in \mathfrak{A}_\sigma$$

$f^{-1}(I)$ also messbar ist.

Eine komplexwertige Funktion heißt messbar, wenn es ihr Real- und Imaginärteil sind. Stetige Funktionen auf $\mathbb{R}^n$ sind bezüglich $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$ messbar. Vielfache, Summen, Produkte und Kehrwertfunktionen messbarer Funktionen sind wieder messbar.

2.2 Einfache Funktionen und ihr Integral

Ab nun werden immer auf einem Maßraum erklärte Funktionen betrachtet.

Definition 18 *Die charakteristische Funktion oder Indikatorfunktion χ_A der Menge A ist gegeben durch*

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & \textit{wenn } x \in A \;, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Definition 19 *Eine Funktion f heißt einfach oder Treppenfunktion, wenn sie folgende Darstellung hat*

$$f = \sum_1^n \alpha_k \chi_{A_k} \quad \textit{mit } A_i \cap A_k = \emptyset,\, A_k \in \mathfrak{A}_\sigma,\, \alpha_k \in \mathbb{R} \tag{18}$$

Die einfachen Funktionen bilden einen linearen Raum.

Definition 20 *Eine auf einem Maßraum erklärte einfache Funktion heißt integrierbar, wenn für alle k mit $\alpha_k \neq 0$ gilt: $\mu(A_k) < \infty$.*

Definition 21 *Die Zahl*

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu := \sum_1^n \alpha_k \mu(A_k) \tag{19}$$

heißt das Integral (μ-Integral) der einfachen Funktion f über X.

Der Wert des Integrals ist von der Darstellung der Funktion f unabhängig. Es ist ein lineares Funktional und überdies monoton:

$$f_1 \leq f_2 \Rightarrow \int_X f_1\, d\mu \leq \int_X f_2\, d\mu \tag{20}$$

2.3 Das Integral messbarer Funktionen

Satz 5 *Jede nichtnegative messbare Funktion ist der Grenzwert einer monoton nicht fallenden Folge nichtnegativer einfacher Funktionen. Ist f beschränkt, so ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Definition 22 *Die nichtnegative Funktion f sei messbar und f_n eine monoton nicht fallende Folge nichtnegativer einfacher Funktionen mit f als Grenzwert. Dann ist das Integral über f definiert durch*

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu \tag{21}$$

Diese Zahl ist von der Wahl der f_n unabhängig.

Definition 23 *Eine nichtnegative Funktion f heißt integrierbar, wenn f messbar ist und*

$$\int_X f \, d\mu < \infty$$

ist.

Satz 6 *Ist f eine messbare Funktion, dann sind die Funktionen*

$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\}, \; f^-(x) := \max\{-f(x), 0\} \tag{22}$$

ebenfalls messbar.

Definition 24 *Eine messbare Funktion f heißt integrierbar, wenn dies für f^+ und f^- zutrifft. Ihr Integral ist dann definiert durch*

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f^+ \, d\mu - \int_X f^- \, d\mu \tag{23}$$

Eine komplexwertige Funktion h heißt integrierbar, wenn $\Re h$ und $\Im h$ dies sind. Ihr Integral ist dann durch

$$\int_X h \, d\mu := \int_X \Re h \, d\mu + i \int_X \Im h \, d\mu \tag{24}$$

gegeben. Das Integral ist ein lineares Funktional auf dem Raum der integrierbaren Funktionen.

Definition 25 *Sei A messbar. Dann bedeute*

$$\int_A f \, d\mu := \int_X f \chi_A \, d\mu \,.$$

(Das Produkt messbarer Funktionen ist wieder messbar.)

2.4 Eigenschaften des Integrals

Satz 7 *Sind f und g integrierbar, so gilt*

$$\Big(\bigwedge_{A \in \mathfrak{A}_\sigma} \int_A f \, d\mu = \int_A g \, d\mu\Big) \;\Rightarrow\; f = g \quad f.ü. \tag{25}$$

Konvergenzsätze:

Satz 8 *Die Folge nichtnegativer messbarer Funktionen f_n sei monoton nichtfallend und es sei $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ f.ü.. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn die Zahlenfolge $\int f_n \, d\mu$ beschränkt ist. Ferner gilt immer*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu \tag{26}$$

Satz 9 *(Satz von der majorisierten Konvergenz): Sei g integrierbar, f_n eine Folge $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger messbarer Funktionen mit $|f_n| \le g$ f.ü. und $f_n \to f$ f.ü.. Dann gilt*

$$\bigwedge_{A \in \mathfrak{A}_\sigma} \lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu = \int_A f \, d\mu \tag{27}$$

2.5 Lebesgue-Stieltjes-Integrale

$\mathfrak{F}_1$ besteht aus endlichen Vereinigungen disjunkter Elemente des Mengensystems $\mathfrak{I} := \{(a, b], a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ der nach links halboffenen Intervalle. Man kann daher einen Inhalt auf $\mathfrak{F}_1$ dadurch festlegen, daß man ihn auf $\mathfrak{I}$ angibt. Ein auf einem Ring $\mathfrak{R}$ erklärter Inhalt heißt endlich, wenn er auf $\mathfrak{R}$ nur endliche Werte annimmt.

Satz 10 1. *Ist $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine wachsende (= nichtfallende) Funktion, so ist die Fortsetzung von $m_F : \mathfrak{I} \to \mathbb{R}; m_F((a, b]) := F(b) - F(a), a \leq b$ auf $\mathfrak{F}_1$, die ebenfalls mit m_F bezeichnet werden möge, ein endlicher Inhalt. Für zwei wachsende Funktionen F, G gilt genau dann $m_F = m_G$, wenn $F - G$ konstant ist.*

2. *Ist m ein endlicher Inhalt und definiert man $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch*

$$F(x) = \begin{cases} m((0, x]) & \text{für } x \geq 0 \ , \\ -m((x, 0]) & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

dann ist F wachsend und $m = m_F$.

Die solchermaßen erzeugten Inhalte heißen Stieltjessche Inhalte. Für die Fortsetzung von Stieltjesschen Inhalten zu Maßen ist ihre σ-Additivität notwendig. Deren Kennzeichnung durch eine Eigenschaft von F erfolgt durch den

Satz 11 *Der durch die wachsende Funktion F erzeugte Inhalt m_F ist genau dann σ-additiv, wenn F rechtsstetig ist.*

Bezeichnet man zwei wachsende Funktionen als äquivalent, wenn $F - G$ konstant ist, dann ergeben diese beiden Sätze eine Bijektion zwischen der Menge der endlichen Inhalte $m : \mathfrak{F}_1 \to \mathbb{R}$ und der Menge der Äquivalenzklassen $[F]$ wachsender Funktionen F bzw. der Menge der endlichen σ-additiven Inhalte und der Menge der Äquivalenzklassen rechtsstetiger wachsender Funktionen.

Auf einen σ-additiven Stieltjesschen Inhalt kann man den Fortsetzungssatz 3 anwenden. Das bei der Konstruktion in diesem Satz auftretendeäußere Maß heißt hier äußeres Stieltjessches Maß M_F. Die σ-Algebra $\mathfrak{A}_F$ der M_F-messbaren Mengen umfasst jedenfalls $\mathfrak{B}_1$, da sie $\mathfrak{F}_1$ enthält, die Einschränkung λ_F von M_F auf $\mathfrak{A}_F$ heißt das Lebesgue-Stieltjes-Maß zu F; seine Einschränkung auf $\mathfrak{B}_1$ sei mit μ_F bezeichnet.

Im Folgenden sei F immer rechtsstetig.

Ist $\lim_{x \to -\infty} F(x) = c > -\infty$, dann ist $\tilde{F}(x) := F(x) - c \geq 0$ eine äquivalente maßerzeugende Funktion, für die $\mu_{\tilde{F}}(-\infty, x] = \tilde{F}(x)$ gilt, sie werde die normierte maßerzeugende Funktion genannt. Ist überdies μ_F ein Wahrscheinlichkeitsmaß, so ist $\mu_{\tilde{F}}(\mathbb{R}) = \lim_{x \to \infty} \tilde{F}(x) = 1$, die o.B.d.A. so wählbare maßerzeugende Funktion heißt die Verteilungsfunktion des Maßes $\mu_{\tilde{F}}$ auf $\mathbb{R}$.

Das Integral einer messbaren Funktion f bezüglich eines Maßes μ_F nennt man das Lebesgue-Stieltjes-Integral von f bezüglich F, geschrieben als

$$\int_{\mathbb{R}} f dF := \int_{\mathbb{R}} f d\mu_F$$

Sei μ_F durch eine absolut stetige maßerzeugende Funktion F gegeben. Dann gilt:

Satz 12 *Für alle messbaren f ist*

$$\int_{\mathbb{R}} f dF = \int_{\mathbb{R}} f F' d\mu_1 \tag{28}$$

Diese Gleichheit ist darauf zurückzuführen, dass für absolutstetige F $\mu_F((a,b]) = \int_a^b F' d\mu_1$ gilt.

Teil III
Sesquilinearformen und Polarisierungsidentität

Definition 1 *Sei $\mathfrak{V}$ ein Teilraum eines komplexen linearen Raumes (unitären Raumes) $\mathfrak{H}$. Eine Abbildung $s : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \to \mathbb{C}$ heißt* Sesquilinearform *auf $\mathfrak{V}$, wenn für alle $f, g, h \in \mathfrak{V}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$s(f, \alpha g + \beta h) = \alpha s(f, g) + \beta s(f, h) \tag{1}$$

$$s(\alpha f + \beta g, h) = \alpha^* s(f, h) + \beta^* s(g, h) \tag{2}$$

Eine Sesquilinearform ist also im zweiten Argument linear und im ersten konjugiert linear. (sesqui heißt lateinisch eineinhalb.)

Beispiele für Sesquilinearformen:

1. Skalarprodukte
2. Für jeden linearen Operator A in $\mathfrak{H}$ ist $s_A(f, g) := \langle f, Ag \rangle$ eine Sesquilinearform mit $\mathfrak{V} = \mathfrak{D}_A$.

Die einer Sesquilinearform s zugeordnete Abbildung $q : \mathfrak{V} \times \mathfrak{V} \to \mathbb{C}$, $q(f) := s(f, f)$ heißt die durch s erzeugte quadratische Form. Für jede quadratische Form gilt

$$q(\alpha f) = |\alpha|^2 q(f) \tag{3}$$

Insbesondere ist also für alle α mit $|\alpha| = 1 \quad q(\alpha f) = q(f)$.
In einem komplexen Vektorraum bestimmt die von s erzeugte quadratische Form die sie erzeugende Sesquilinearform; dies sagt der

Satz 1 Polarisierungsidentität*: s sei eine auf dem komplexen Vektorraum $\mathfrak{V}$ gegebene Sesquilinearform, q die zugehörige quadratische Form. Dann gilt für alle $f, g \in \mathfrak{V}$*

$$s(f, g) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k q(i^k f + g) \tag{4}$$

Der Beweis erfolgt durch Ausrechnen unter Benützung von (**??**) und (**??**).

Definition 2 *Eine Sesquilinearform s in $\mathfrak{H}$ heißt hermitesch, wenn für alle $f, g \in \mathfrak{V}$ gilt: $s(f, g) = s(g, f)^*$.*

Fts. von Beispiel (2): s_A ist genau dann hermitesch, wenn A dies ist. Denn dann ist für alle $f, g \in \mathfrak{D}_A \quad \langle f, Ag \rangle^* = \langle Ag, f \rangle = \langle g, Af \rangle$, wobei in der letzten Gleichheit benützt wurde, dass A hermitesch ist. Dies erklärt auch die Benennung dieser Eigenschaft von Sesquilinearformen.

Satz 2 *s ist genau dann hermitesch, wenn das zugeordnete q reell ist.*

Beweis:
i) Für hermitesches s gilt $q(f)^* = s(f,f)^* = s(f,f) = q(f)$
ii) Die Polarisierungsidentität kann mit Benützung von (**??**) in die Form

$$s(f,g) = \frac{1}{4}[q(f+g) - q(f-g) + iq(f-ig) - iq(f+ig)]$$

gebracht werden, wobei in den zweiten bis vierten Summanden $\alpha = -1, -i, +i$ gewählt wurde.Daraus folgen $\Re\, s(f,g) = \frac{1}{4}[q(f+g) - q(f-g)]$ und $\Im\, s(f,g) = \frac{1}{4}[q(f-ig) - q(f+ig)]$. Das ergibt

$$s(g,f)^* = \Re\, s(g,f) - i\Im\, s(g,f) = \frac{1}{4}[q(g+f) - q(g-f) - iq(g-if) + iq(g+if)] = s(f,g)$$

nach (**??**).

Daraus folgt für eine Sesquilinearform nach Beispiel b) der

Zusatz: A ist genau dann hermitesch, wenn q_A auf $\mathfrak{D}_A$ reell ist, und genau dann symmetrisch, wenn zusätzlich $\mathfrak{D}_A$ dicht liegt.

Teil IV
Spektraltheorie unbeschränkter selbstadjungierter Operatoren

1 Vorbemerkungen zum Spektralsatz

Ein Zugang zum Begriff des Spektrums eines linearen Operators T ist der über die wünschenswerten Eigenschaften der Lösung jener inhomogenen linearen Gleichung in einem Banach- oder Hilbertraum X, die durch T in der von einem Parameter $\lambda \in \mathbb{C}$ abhängigen Form

$$(T - \lambda I)u = v \tag{1}$$

gegeben ist. Man richtet die folgenden Wünsche an das Lösungsverhalten dieser Gleichung:
a) (**??**) hat für alle $v \in X$ eine Lösung. Dies bedeutet, dass $(T - \lambda I)$ surjektiv ist.
b) Die Lösung u ist immer eindeutig. Dies bedeutet, dass $(T - \lambda I)$ injektiv ist.
c) u hängt stetig von v ab.

Wenn diese drei Bedingungen zutreffen, nennt man (vor allem in bestimmten konkreten Ausformungen) die durch (**??**) gegebene Aufgabe der Bestimmung von u korrekt oder sachgerecht gestellt. c) gewinnt seine Bedeutung vor allem auch in Hinblick auf Anwendungen, bei denen die "Angabe" v nicht immer genau (durch den einzigen Punkt v in X dargestellt) bekannt ist, sondern mit einer gewissen endlichen Genauigkeit, also durch eine genügend kleine Umgebung von v gegeben ist. Dann möchte man, dass eine kleine Abänderung von v in dieser Umgebung nicht zu einer starken Änderung der Lösung führt.

Die Erfüllung von a) und b) bedeutet, dass $(T - \lambda I)^{-1}$ existiert und überall definiert ist. Da die Lösung dann als $u = (T - \lambda I)^{-1}v$ geschrieben werden kann, heißt $R(T, \lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$ die Resolvente von T zum Parameter λ. c) verlangt zusätzlich, dass $R(T, \lambda)$ stetig ist. Die Erfüllbarkeit aller dieser drei Bedingungen hängt für gegebenes T von λ ab. Jene $\lambda \in \mathbb{C}$, für die das möglich ist, also $R(T, \lambda)$ überall definiert und stetig ist, bilden die *Resolventenmenge* $\rho(T)$ von T, das Komplement davon definitionsgemäß sein *Spektrum* $S(T)$, oft auch mit $\sigma(T)$ bezeichnet.

1.1 Das Spektrum von Operatoren in der QM

In der Quantenmechanik werden die Eigenwerte eines selbstadjungierten Operators als Messwerte gedeutet. Andererseits kommen aber oft ganze Abschnitte der reellen Achse als mögliche Messwerte in Frage, deren Punkte im allgemeinen keine echten Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren sind.

Daher kann man sich bei der mathematischen Untersuchung von ihnen nicht auf Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren beschränken. Für eine allgemeine und widerspruchsfreie Untersuchung der möglichen Messwerte einer Messgröße, die durch einen selbstadjungierten Operator dargestellt wird, ist daher eine eigenvektorfreie Theorie notwendig.

Man geht hiezu von folgender Beobachtung aus: Zu jedem Eigenwert λ gehört ein zugehöriger Eigenraum, der von allen zu λ gehörigen Eigenvektoren erzeugt wird. Dieser Eigenraum ist eine basisunabhängige Kennzeichnung aller möglichen Eigenvektoren. Ferner ist ihm ein Projektionsoperator E_λ zugeordnet. Der Vereinigungsmenge mehrerer Eigenwerte $\lambda_1, \cdots \lambda_n$ ist die orthogonale Summe der entsprechenden Eigenräume mit dem Projektionsoperator $E(\{\lambda_1\} \cup \cdots \cup \{\lambda_n\})$ zugeordnet.

Man erhält auf dieser Art eine Zuordnung von Projektionsoperatoren zu jeder Teilmenge aus dem Eigenwertspektrum, da auch unendliche Summen von Projektionsoperatoren durch starke Konvergenz erklärt sind. Für zueinander fremde Teilmengen A, B des Spektrums gilt hiebei

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow E(A \cup B) = E(A) + E(B)$$

Es sei nun das Spektrum des Operators, also die Menge aller möglichen Messwerte der zugehörigen Messgröße, eine beliebige Teilmenge der reellen Achse. Dann legt das vorhin Gesagte nahe, auch bei beliebigem Spektrum eine projektorwertige Funktion einzuführen, die auf allen Teilmengen des Spektrums definiert ist und der vorhin erwähnten Additivitätsforderung genügt. Zur Vervollständigung wird sie auf allen Mengen, die nicht zum Spektrum gehören, gleich $\mathbb{O}$ gesetzt. Eine solche Funktion heißt Spektralmaß und ist ein vollwertiger Ersatz für die nicht mehr unbedingt vorhandenen Eigenvektoren. Es bleiben dann Aussagen wie: "Der Vektor ist Eigenvektor zum Spektralwert λ" nicht immer sinnvoll, dagegen hat eine Aussage der Art: "Der Vektor gehört zum Teilraum des Operators $E(I)$ mit $I \subset \mathbb{R}$" immer Sinn.

Ein anderer Zugang zu diesem Problem ergibt sich, wenn man wieder vom Falle des reinen Punktspektrums ausgeht und annimmt, daß die Eigenwerte eine nach unten beschränkte, in aufsteigender Reihenfolge geordnete und abgezählte Menge bilden. Der Zusammenfassung der ersten n Eigenwerte entspricht wie oben der Projektionsoperator auf die direkte orthogonale Summe der ersten n Eigenräume; man erhält dadurch bei wachsendem n einen Projektionsoperator als Funktion von n oder auch vom zugehörigen λ_n, gegeben durch

$$E_{\lambda_n} = \sum_{i=1}^{n} E_i$$

Diese Funktion ist in dem Sinn eine wachsende Funktion von λ_n, als die zugehörigen Operatoren auf immer umfassendere Teilräume von $\mathfrak{H}$ projizieren, die alle Teilräume zu niedrigerem λ_i enthalten. E_{λ_n} kann zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden, indem man für alle zwischen zwei benachbarten Eigenwerten liegenden Intervalle erklärt:

$$E_\lambda = E_{\lambda_n} \quad \lambda_n \leq \lambda < \lambda_{n+1}$$

Man erhält somit eine mit λ monoton zunehmende Schar von Projektionsoperatoren, die als eine auf der ganzen λ-Achse erklärte operatorwertige Funktion aufgefaßt werden kann. Sie verändert sich nur in den Punkten des Spektrums. Dieser Sachverhalt legt ebenfalls eine Verallgemeinerung nahe: Bei beliebigem Spektrum wird man eine auf der λ-Achse definierte projektorwertige Funktion E_λ vorfinden, die auf den Punkten des Spektrums monoton im oben angegebenen Sinn wächst und außerhalb des Spektrums konstant ist. In Spektrumspunkten, die keine Eigenwerte sind, wird man aber ein noch näher festzulegendes "stetiges

Zunehmen" zulassen müssen.

Diese beiden Fassungen der Verallgemeinerung des Eigenwertproblems sind einander gleichwertig, da Spektralschar und Spektralmaß einander eineindeutig entsprechen.

2 Spektralschar und Spektralmaß

Es seien λ, μ Elemente aus $\mathbb{R}^n$. Dann bedeute

$$\lambda \leq \mu :\Leftrightarrow \bigwedge_i \lambda_i \leq \mu_i$$

Definition 1 *Ein Operator A heißt nichtnegativ, bezeichnet als $A \geq 0$, wenn*

$$\bigwedge_{f \in \mathfrak{D}_A} \langle f, Af \rangle \geq 0$$

gilt. Unter $A \geq B$ ist dann $A - B \geq 0$ zu verstehen.

Definition 2 *Eine projektorwertige Funktion E_λ auf $\mathbb{R}^n$ heißt Spektralschar, wenn gilt:*

1. *Alle Paare E_λ, E_μ sind zu beliebigen λ, μ vertauschbar*
2. *$\lambda \leq \mu \Rightarrow E_\lambda \leq E_\mu$, oder gleichwertig (vgl. Großmann, S. 194 9.))*

$$\lambda \leq \mu \Rightarrow E_\lambda = E_\lambda E_\mu = E_\mu E_\lambda$$

3. *$s - \lim_{\delta \downarrow 0} E_{\lambda+\delta} = E_\lambda$: Die Abbildung ist von rechts stark stetig.*
4. *$s - \lim_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = \mathbb{O}$; $\qquad s - \lim_{\lambda \to +\infty} E_\lambda = \mathbb{I}$*

Definition 3 *Ein Spektralmaß $E(S)$ auf einem Messraum $(X, \mathfrak{A}_\sigma)$ ist eine projektorwertige Funktion auf $\mathfrak{A}_\sigma$ so daß gilt*

$$E(X) = \mathbb{I} \qquad E(\bigcup_1^\infty S_k) = s - \lim_{n\to\infty} \sum_1^n E(S_k) \, mit \, S_k \in \mathfrak{A}_\sigma \, , \, \bigwedge_{i \neq k} S_i \cap S_k = \emptyset$$

Daraus folgt:

$$E(\emptyset) = \mathbb{O} \qquad ; \qquad E(R)E(S) = \mathbb{O} \quad \text{für } R \cap S = \emptyset$$

Satz 1 *Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann entspricht jeder Spektralschar eindeutig ein Spektralmaß und umgekehrt, wobei der Zusammenhang durch*

$$E_\lambda = E(Q_\lambda) \qquad Q_\lambda = (-\infty, \lambda_1] \times \cdots \times (-\infty, \lambda_n]$$

hergestellt wird. Hiebei werden zur Erzeugung des Spektralmaßes aus der Spektralschar folgende Festsetzungen verwendet:

$$\begin{aligned} E(B_1 \cup B_2) &= E(B_1) + E(B_2) \qquad \textit{für } B_1 \cap B_2 = \emptyset \\ E(B_1 \cap B_2) &= E(B_1)E(B_2) \\ E(\mathbf{C}B_1) &= \mathbb{I} - E(B_1) \end{aligned}$$

Daraus folgt eine Monotonie des Spektralmaßes in folgendem Sinne:

$$A \subset B \Rightarrow E(A) \leq E(B)$$

Hiedurch wird die zuerst nur auf den nach links unbeschränkten Quadern erklärte Abbildung $E_\lambda = E(Q_\lambda)$ zunächst auf alle Quader und dann auf den Ring $\mathfrak{F}_n$ aller endlichen Vereinigungen von Quadern (Quaderaggregate) fortgesetzt, wobei E auf $\mathfrak{F}_n$ σ-additiv wird. Da sich nachprüfen läßt, daß für den Fortsetzungssatz für Maße nur jene Strukturelemente eines Maßes eine Rolle spielen, die auch ein projektorwertiges Maß aufweist, kann man auch hier die auf $\mathfrak{F}_n$ definierte σ-additive Abbildung zu einer solchen auf ganz $\mathfrak{B}_n$ fortsetzen, die die Voraussetzungen für ein Spektralmaß erfüllt.

Definition 4 *Ein komplexes Maß μ auf einem Messraum $(X, \mathfrak{A}_\sigma)$ ist eine endliche Linearkombination von endlichen reellen Maßen μ_α der Art*

$$\mu(S) = \sum_1^n c_\alpha \mu_\alpha(S)\,, c_\alpha \in \mathbb{C}$$

wobei die μ_α auf $(X, \mathfrak{A}_\sigma)$ definiert sind. Integrale von komplexen messbaren Funktionen bezüglich des komplexen Maßes werden als Linearkombinationen der bezüglich der rellen Summanden gebildeten Integrale erklärt.

Satz 2 *Eine auf einem Messraum X definierte projektorwertige Mengenfunktion mit $E(X) = \mathbb{I}$ ist genau dann ein Spektralmaß, wenn für zwei beliebig gegebene Vektoren f, g die Größe*

$$\mu_{f,g}(S) = \langle f, E(S)g \rangle = s_{E(S)}(f, g)\ ,$$

eine Sesquilinearform von der Art des Bsp. b), ein komplexes Maß ist.

Bemerkung: Für $f = g$ ist $\mu_{(f)} := \mu_{f,f}$ ein reelles Maß; wenn außerdem $||f|| = 1$ ist, ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

Die Polarisierungsidentität **??** liefert sofort die Darstellung eines komplexen Maßes $\mu_{f,g}$ als Linearkombination von vier reellen Maßen der gerade eingeführten Art:

$$\mu_{f,g}(S) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} i^k \mu_{(i^k f + g)}(S) \tag{2}$$

3 Der Sonderfall $X = \mathbb{R}$ (n = 1): Spektralmaß, Spektralschar und Spektralsatz

Im Falle $X = \mathbb{R}$ sind alle $\mu_{(h)} (h \in \mathfrak{H})$ endliche Maße auf $\mathbb{R}$, und daher sind ihre Einschränkungen auf $\mathfrak{F}_1$ endliche σ-additive Inhalte im Sinne der im Abschnitt über Lebesgue-Stieltjes-Maße getroffenen Festsetzungen. Nach Satz 10 gibt es also zu jedem $\mu_{(h)}$ eine nichtfallende Funktion F_h, die $\mu_{(h)}$ (als Fortsetzung des zugehörigen Inhalts) erzeugt, und die man gemäß den nach Satz **??** gemachten Bemerkungen o.B.d.A. als normierte maßerzeugende Funktion voraussetzen kann. Der Zusammenhang zwischen Spektralschar und Spektralmaß nach Satz **??** dieses Abschnitts ($E_\lambda = E((-\infty, \lambda])$ liefert die Darstellung dieser erzeugenden Funktion des Maßes $\mu_{(h)}$:

$$F_h(\lambda) = \mu_{(h)}((-\infty, \lambda]) = \langle h, E((-\infty, \lambda])h\rangle = \langle h, E_\lambda h\rangle \tag{3}$$

Damit ist der Sinn der im folgenden Spektralsatz auftretenden Integrale erklärt.

Satz 3 *(Spektralsatz für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren): Zu jedem selbstadjungierten Operator A in einem Hilbertraum gehört eine eindeutig bestimmte Spektralschar E_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass für alle $f \in \mathfrak{D}_A$ und alle $g \in \mathfrak{H}$ gilt*

$$\langle g, Af\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\langle g, E_\lambda f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\mu_{g,f}(\lambda) \tag{4}$$

Hiebei ist der Definitionsbereich von A durch alle Vektoren f gegeben, für die gilt

$$||Af||^2 = \langle f, A^2\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle f, E_\lambda f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d\mu_{(f)} \; < \; \infty \tag{5}$$

Die Funktionen λ, λ^2 liegen fest, die Maße $\mu_{f,g}$ sind je nach f, g verschieden. Die Zugehörigkeit von f zu $\mathfrak{D}_A$ hängt also davon ab, ob die Funktion λ^2 bezüglich des Maßes $\mu_{(f)}$ integrierbar ist oder nicht.

3.1 Kennzeichnung des Spektrums

Ein Punkt $\lambda \in \mathbb{R}$ gehört zum Spektrum $S(A)$ des Operators A, wenn $E(J) \neq \mathbb{O}$ gilt für jedes offene Intervall J, das λ enthält. Ein Punkt λ gehört zum Punktspektrum $S_p(A)$, wenn $E(\{\lambda\}) \neq \mathbb{O}$ ist. Das stetige Spektrum $S_c(A)$ ist das Spektrum der Einschränkung von A auf den Orthogonalraum zur direkten Summe aller Eigenräume von A.

Satz 4 *$S(A)$ ist immer eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}$ und es gilt $E(S(A)) = \mathbb{I}$.*

3.2 Spezialisierung der Spektraldarstellung für reine Punktspektren

Um den Zusammenhang mit vertrauteren Formen der Spektraldarstellung eines selbstadjungierten Operators herzustellen, wird die Darstellung (**??**) für den Fall eines Operators A mit einem reinen Punktspektrum aufgesucht, dessen Eigenvektorsystem vollständig ist. Es gilt zunächst allgemein der folgende

Satz 5 *Sei $\mathfrak{N}_k$ eine Folge von paarweise orthogonalen Teilräumen eines Hilbertraumes mit zugehörigen Projektionsoperatoren E_k, und sei $\mathfrak{N}$ der von den $\mathfrak{N}_k$ aufgespannte abgeschlossene Teilraum, so gilt*

$$s - lim_{n\to\infty} \sum_1^n E_k = E_{\mathfrak{N}}.$$

Seien nun insbesondere E_k die zu den einzelnen durch die Eigenwerte λ_k gekennzeichneten Eigenräumen gehörigen Projektionsoperatoren. Dann gilt wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit des als normiert vorausgesetzten Eigenvektorsystems f_k

$$f = \sum_1^\infty f_j \langle f_j, f \rangle$$

oder, nach Eigenräumen zusammengefaßt

$$f = E_{\mathfrak{H}} f = s - \sum_1^\infty E_k f \quad .$$

Ferner gilt wegen der Zusammenhänge zwischen den $E_k, \mathfrak{N}_k$ und λ_k

$$\bigwedge_{f \in \mathfrak{H}} E_k f \in \mathfrak{N}_k \quad ; \quad \mathfrak{N}_k = \{f | E_k f = f\} \quad ;$$

mit

$$f_n := \sum_1^n E_k f$$

folgt dann

$$A f_n = A(\sum_1^n E_k f) = \sum_1^n \lambda_k (E_k f)$$

Sei nun f ein Vektor mit $\sum_1^\infty |\lambda_k|^2 \, ||E_k f||^2 < \infty$. Dann ist Af_n eine Cauchyfolge, die einen Grenzwert g hat. Wegen der Abgeschlossenheit selbstadjungierter Operatoren gilt für ihn

$$Af = g = s - \sum_1^\infty \lambda_k (E_k f)$$

Dies ist ein Sonderfall von (**??**) in Satz **??**, wenn man dort ein Spektralmaß einsetzt, das nur in den Punkten $\lambda = \lambda_k$ vom $\mathbb{O}$-Operator verschieden und dort gleich E_k ist. Die zugehörige Spektralschar ist gegeben durch

$$E_\lambda = E(Q_\lambda) = \sum_{k, \lambda_k \leq \lambda} E_k$$

Die Satz **??** entsprechende Zuordnung von Spektralschar und Spektralmaß wird durch

$$E(\{\lambda_k\}) = E_{\lambda_k} - E_{\lambda_{k-1}} = E_k$$

vermittelt.
Im Fall des reinen Punktspektrums sind also die Eigenwerte die einzigen Wachstumspunkte der Spektralschar.

4 Spektralsatz für unitäre Operatoren

Satz 6 *Zu jedem unitären Operator U gibt es eine eindeutig zugeordnete Spektralschar E_λ mit $E_\lambda = \mathbb{O}$ für $\lambda < -\pi$, $E_\lambda = \mathbb{I}$ für $\lambda \geq +\pi$, so dass gilt*

$$U = \int_{-(\pi+0)}^{\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda \quad , \tag{6}$$

wobei das Integralüber die Spektralschar wie früher aufzufassen ist.
Ferner gilt $S(U) \subset S^1 \subset \mathbb{C}$.

5 Ein Beispiel für eine Spektralschar: Der Koordinatenoperator X_i

Der Operator X_i ist definiert durch

$$X_i : \psi(x_k) \to x_i \psi(x_k)$$

Folgende heuristische Überlegungen nach von Neumann, S. 67, führen zur Auffindung der Spektralschar, die dann durch Überprüfung als solche nachgewiesen wird. Die Eigenwertgleichung

$$X_i \psi = \lambda \psi$$

würde bedeuten

$$x_i \psi = \lambda \psi$$

Gäbe es mehrere Eigenwerte $\lambda_1 \cdots \lambda_k$, so wäre eine Funktion, die der Summe aller Eigenräume zu den λ_i angehört, eine Funktion, die für $x_i = \lambda_1 \cdots \lambda_k$ nicht verschwindet. Nun gilt im Fall eines Punktspektrums

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_i < \lambda} P_{\mathfrak{N}_{\lambda_i}}$$

Andererseits ist hier jede reelle Zahl möglicher Messwert, also "uneigentlicher Eigenwert", so dass man obige Summeüber alle Zahlen $\leq \lambda$ erstrecken müßte. Dies legt die Vermutung nahe: E_λ projiziert auf jene Funktion, die für $x_i \leq \lambda$ mit ψübereinstimmt und für $x_i > \lambda$ gleich Null ist. Der zugehörige Teilraum besteht aus allen Funktionen, die für $x_i \leq \lambda$ ungleich Null und für $x_i > \lambda$ gleich Null sind. Also

$$E_\lambda(X_i)\psi(x_1 \cdots x_n) = \Theta(\lambda - x_i)\psi(x_k) = \begin{cases} \psi & \text{wenn } x_i \leq \lambda \ , \\ 0 & \text{wenn } x_i > \lambda \end{cases}$$

Der Spektralscharprojektor wirkt also als Multiplikation mit der Indikatorfunktion des Intervalls $Q_\lambda = (-\infty, \lambda]$. Zur Überprüfung dieses Ansatzes für die Spektralschar wird sie in die Formeln (**??**, **??**) des Spektralsatzes eingesetzt, und zwar, da man wegen der Polarisierungsidentität Integrale der Art (**??**) (mit ungleichen Vektoren f und g im Skalarprodukt) auf solche mit Maßen $\mu_{(f)}$ zurückführen kann, in eine allgemeine Form der letzteren:

$$\int f(\lambda) d\langle\psi, E_\lambda(X_i)\psi\rangle = \int f(\lambda) d||E_\lambda(X_i)\psi||^2 =$$

$$\int f(\lambda) d \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\lambda} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x_1 \cdots x_n)|^2 dm_x =$$

$$\int f(\lambda) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x_1 \cdots x_{i-1}, \lambda, x_{i+1}, \cdots x_n)|^2 dx_1 \cdots dx_{i-1}, dx_{i+1} \cdots dx_n \right) d\lambda =$$

$$\int f(x_i) |\psi(x_1 \cdots x_n)|^2 dm_x$$

In dieser Rechnung wird verwendet, dass die maßerzeugende Funktion auf der λ-Achse durch ein unbestimmtes Integral über die noch von x_i abhängende L^1-Funktion

$$\int |\psi(\cdots)|^2 dx_1 \cdots dx_{i-1}, dx_{i+1} \cdots dx_n$$

gegeben ist, also (als unbestimmtes Integral) eine in λ absolut stetige Funktion, auf die man **??** aus Satz **??** aus Abs. **??**über LS-Integrale anwenden kann. Damit folgt insbesondere: $\psi \in \mathfrak{D}(X_i) \Leftrightarrow \int x_i^2 |\psi(\cdots)|^2 dm_x = ||X_i\psi||^2 < \infty$, also genau das erwartete Ergebnis. Ebenso zeigt man $\langle\varphi, X_i\psi\rangle = \int x_i \overline{\varphi(\cdots)} \psi(\cdots) dm_x$.

Damit ist die Vermutung bestätigt, dass E_λ als Multiplikation mit der Indikatorfunktion $\chi_{Q_\lambda}(x_i)$ wirkt. Aus den nach Satz 1 angegebenen Beziehungen, die die Abbildung mengentheoretischer Verknüpfungen in die Algebra der Spektralmaßprojektoren wiedergeben, ersieht man, dass diese formal denen der Indikatorfunktionen entsprechen, wenn man für $\mathbb{I}$ die Einsfunktion setzt. Daraus kann man folgern:

$$E(X_i)(B)\psi(\cdots) = \chi_B(x_i)\psi(\cdots) \tag{7}$$

Die Spektralmaßprojektoren wirken also in diesem Falle wie etwas Vertrautes, nämlich wie Multiplikationsoperatoren. Ihre Idempotenz und Symmetrie ist offensichtlich.

6 Das gemeinsame Spektralmaß vertauschbarer selbstadjungierter Operatoren

Definition 5 *Zwei selbstadjungierte Operatoren A, B heißen vertauschbar, wenn ihre Spektralmaße vertauschbar sind*

$$\bigwedge_{B_1, B_2 \in \mathfrak{B}_1} [E^A(B_1), E^B(B_2)] = \mathbb{O} \ . \tag{8}$$

Durch diese Definition der sogenannten starken Vertauschbarkeit werden die Schwierigkeiten mit den Bereichsfragen von A und B umgangen, indem man in der Definition nur beschränkte Operatoren verwendet.

Bsp.: Die Spektralmaße der Koordinatenoperatoren X_i, X_j werden durch Multiplikationsoperatoren von Indikatorfunktionen dargestellt, die natürlich vertauschbar sind. Daher ist

X_i mit X_j für jedes Paar i, j vertauschbar.

Es seien nun $A_1, \cdots A_n$ vertauschbare, selbstadjungierte Operatoren, $E^1(B), \cdots E^n(B)$ ihre Spektralmaße. Durch

$$E^{1\cdots n}(B_1 \times \cdots \times B_n) = \prod_{i=1}^{n} E^i(B_i) \tag{9}$$

kann man eine projektorwertige Funktion erklären, die man auf ganz $\mathfrak{B}_n$ fortsetzen kann. Die Fortsetzung erfolgt gleich wie bei gewöhnlichen Produktmaßen, da die für die Fortsetzung wesentlichen algebraischen Eigenschaften des Maßes für projektorwertige Maße ebenfalls erfüllt sind. Man gelangt zu einem Spektralmaß $E^{1\cdots n}(B)$, $B \in \mathfrak{B}_n$.

Für einen Vektor ψ mit $||\psi|| = 1$ ist

$$P_\psi^{1\cdots n}(B) = \langle \psi, E^{1\cdots n}(B)\psi \rangle \tag{10}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{B}_n$. (Siehe Satz **??**) Man fordert nun als

Axiom: $P_\psi^{1\cdots n}(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Messwerte für die durch die Operatoren $A_1 \cdots A_n$ gekennzeichneten Messgrößen innerhalb der Menge $B \in \mathbb{R}^n$ liegen, wenn sich das System im durch ψ gegebenen Zustand befindet.

Beispiel (Fts.): Da alle Koordinatenoperatoren miteinander vertauschbar sind, existiert das gemeinsame Spektralmaß $E^{X_1\cdots X_n}$ aller dieser Operatoren. Aus der Darstellung der Spektralmaße der einzelnen X_i durch Indikatorfunktionen kann gefolgert werden, dass auch $E^{X_1\cdots X_n}(B)$ für eine messbare Teilmenge B des Ortsraumes durch $\chi_B(x_k)$ dargestellt wird. Also ist

$$P_\psi^{X_1\cdots X_n}(B) = \langle \psi, E^{X_1\cdots X_n}(B)\psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \psi^*(x_k)\chi_B(x_k)\psi(x_k)\, d^n x = \int_B |\psi|^2\, d^n x$$

Die Deutung des Quadrates der Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsdichte für den Aufenthaltsort des Teilchens folgt also aus dem allgemeinen Axiom und braucht nicht besonders erhoben zu werden.

6.1 Funktionen von vertauschbaren selbstadjungierten Operatoren

Satz 7 *Es sei F eine beschränkte messbare Funktion auf $\mathbb{R}^n$, $E^{1\cdots n}$ das zu den vertauschbaren selbstadjungierten Operatoren $A_1 \cdots A_n$ gehörende Spektralmaß. Ihm entspricht nach Satz* **??** *eindeutig für jedes Paar f, g ein kompexes Maß $\mu_{f,g}(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^n$. Es gibt dann genau einen beschränkten linearen Operator A, für den gilt*

$$\langle f, Ag \rangle = \int F(\lambda_1 \cdots \lambda_n) d\mu_{f,g}(\lambda). \tag{11}$$

Es ist dadurch die Funktion $A = F(A_1, \cdots A_n)$ der Operatoren $A_1, \cdots A_n$ definiert.

Zusatz: Für reellwertige F ist A selbstadjungiert.

6.2 Der Satz von Stone

Es sei A ein selbstadjungierter Operator, E_λ seine Spektralschar. Dann ist nach dem Satz **??** insbesondere der Operator

$$U(t) = \exp[itA]\,,\ t \in \mathbb{R} \tag{12}$$

für alle t erklärt durch

$$\langle f, U(t)g\rangle = \int \exp[i\lambda t] d\langle f, E_\lambda g\rangle \tag{13}$$

Es gilt dann für U(t):

1. $U(t)$ ist eine stark stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in die unitären Operatoren.
2. $U(0) = \mathbb{I}$
3. $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$ (Gruppenhomomorphismus von $\mathbb{R}$ in die Gruppe der unitären Operatoren)
4. $$\bigwedge_{f\in\mathfrak{D}_A} iAf = s - \lim_{t\mapsto 0} \frac{U(t)f - f}{t} = s - \lim_{t\mapsto 0} \left[\frac{1}{t}(U(t) - \mathbb{I})f\right] \tag{14}$$

Satz 8 *(Satz von Stone): Jeder stark stetigen Abbildung von $\mathbb{R}$ in die unitären Operatoren mit den Eigenschaften (2) bis (3) entspricht genau ein selbstadjungierter Operator A, der sie gemäß Gleichung (**??**) erzeugt und umgekehrt. Hiebei gilt immer der Zusammenhang (4).*

7 4 Axiome der Quantenmechanik (Schrödingerbild)

1. Jedem qm. System ist ein Hilbertraum $\mathfrak{H}$ zugeordnet. Jedem (reinen) Zustand des Systems entspricht ein eindimensionaler Teilraum $\tilde{\psi}$ von $\mathfrak{H}$.
2. Ferner ist jedem qm. System ein selbstadjungierter Operator H zugeordnet, der die Messgröße Energie darstellt. Die Zeitentwicklung eines jeden Zustandes wird durch eine vektorwertige Vertreterfunktion $\psi(t)$ der Zeit t beschrieben, wobei gilt

$$\psi(t) = \exp[-i\frac{t}{\hbar}H]\psi(0)$$

3. Allen Messgrößen des Systems sind selbstadjungierte Operatoren in $\mathfrak{H}$ zugeordnet. Zwei Messgrößen können dann beliebig genau zugleich gemessen werden, wenn ihre Operatoren (Spektralmaße) vertauschbar sind.
4. Es seien $A_i, i = 1 \cdots n$ vertauschbare Operatoren von Messgrößen, $E^{1\cdots n}$ ihr gemeinsames Spektralmaß. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zustand $\tilde{\psi}$ die Messwerte der betreffenden Größen $\lambda_i \in B \in \mathfrak{B}_n$ sind, ist gegeben durch

$$P_{\tilde{\psi}}^{A1\cdots An}(B) = \langle\psi, E^{1\cdots n}(B)\psi\rangle; \psi \text{ Vertreter mit } ||\psi|| = 1$$

Bemerkungen:

Durch die Fassung (2) wird die Zeitentwicklung für alle ψ definiert, nicht nur für solche aus $\mathfrak{D}_H$. Mit Vertreterfunktionen ist gemeint, daß die zugehörigen Zustände die von $\psi(t)$ erzeugten eindimensionalen Teilräume sind. Wegen (4) im Satz von Stone gilt

$$\bigwedge_{\psi(t)\in\mathfrak{D}_H} i\hbar \cdot s - \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t) \tag{15}$$

Man kann zeigen, daß in der Wellenmechanik ($\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$) für $\psi(t) \in C_t^1(\mathbb{R})$ bezüglich t gilt

$$s - \lim_{t'\mapsto 0}\left[\frac{1}{t'}(\psi(x,t+t') - \psi(x,t))\right] = \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} \tag{16}$$