

## Begriffe aus der Lehre von Funktionen, die auf vF übertragbar sind

### Träger einer vF

Sei  $N \subset \mathbb{R}^n$  offen. Man sagt:  $T$  verschwindet in  $N$ , wenn  $\langle T, \varphi \rangle = 0$  gilt für alle  $\varphi$  mit  $\text{supp } \varphi \subset N$ . Wie man zeigen kann, (Walter, S. 32), gilt folgender

Satz : Zu jedem  $T \in \mathcal{D}'$  gibt es eine größte (umfassendste) offene Menge  $M$ , auf der  $T$  verschwindet.

Definition: Das Komplement der im obigen Satz genannten Menge  $M$  heißt der Träger von  $T$ , bezeichnet als  $\text{supp } T := \mathbb{R}^n \setminus M$ .

Man kann zeigen, dass für durch reguläre, stetige Funktionen erzeugte vF der oben eingeführte Begriff des Trägers dieselbe Menge kennzeichnet wie der für Funktionen übliche:  $f \in C(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \text{supp } T_f = \text{supp } f$ . Zum Unterschied von stetigen Funktionen kann jedoch der Träger einer vF auch aus einem oder endlich vielen Punkten bestehen.

Bsp.: Der Träger von  $\delta$  .

$$\text{supp } \delta_{x_0} = x_0$$

### Rechenoperationen mit vF, die von gewöhnlichen Funktionen übertragbar sind

(Ersatz von Sk, S. 17 ff, 4.3 und 4.4, und S.21, 5)

vF entsprechen zwar i. allg., (wenn sie nicht regulär sind,) keinen Funktionen. Dennoch lassen sich gewisse Rechenoperationen, die man von Funktionen her kennt, auf vF verallgemeinern. Allen diesen Verallgemeinerungen liegt dieselbe Idee zugrunde:

Es sei eine Rechenoperation  $W$  gegeben, die Funktionen in andere überführt, und die zumindest auf  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  erklärt ist; in etlichen Fällen ist sie auf ganz  $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  definiert. In allen Fällen sei  $W : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$  (bzw.  $W : L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ) linear. Für reguläre (ggf. von genügend glatten  $f$  erzeugte) vF ist also  $W'(T_f) := T_{W(f)}$  erklärt. Um  $W'$  für beliebige vF einführen zu können, muss man „ $W$  von  $f$  ablösen und auf  $\varphi$  umlegen“ können. Das heißt hier, dass sich eine  $W$  zugeordnete lineare, stetige Abbildung  $\tilde{W} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  finden lassen muss, so dass für alle  $f \in L^1_{loc}(C^\infty)$  und alle  $\varphi$  gilt:

$$\langle W'(T_f), \varphi \rangle = \langle T_{W(f)}, \varphi \rangle = \langle T_f, \tilde{W}(\varphi) \rangle .$$

Man kann dann die Übertragung von  $W$  auf ganz  $\mathcal{D}'$  definieren durch

$$\langle W'(T), \varphi \rangle := \langle T, \tilde{W}(\varphi) \rangle$$

oder einfach als

$$W'(T) := T \circ \tilde{W}$$

Die Linearität und Stetigkeit von  $\tilde{W}$  ist notwendig, damit die Zusammensetzung  $T \circ \tilde{W}$  wieder ein linear-stetiges Funktional auf  $\mathcal{D}$  ist, also eine vF.  $W' : \mathcal{D}' \rightarrow \mathcal{D}'$  ist selbst linear.

Diese Überlegungen zeigen, dass die Voraussetzung für die Übertragung des für gewöhnliche Funktionen erklärten  $W$  das Vorhandensein eines zugeordneten  $\tilde{W}$  mit den angegebenen Eigenschaften ist. Dieses  $\tilde{W}$  muss von der jeweiligen analytischen Gestalt von  $\langle T_{W(f)}, \varphi \rangle = \int W(f) \cdot \varphi \, dm$  ausgehend bestimmt werden, so dass es für alle  $f$  und  $\varphi$  die Umlegung von  $W$  auf  $\varphi$  als  $\int W(f) \cdot \varphi \, dm = \int f \cdot \tilde{W}(\varphi) \, dm$  ermöglicht.

Ein erstes Beispiel für die vorhin erläuterte Vorgangsweise ist die Erklärung der

## Multiplikation einer vF mit einer $C^\infty$ -Funktion

S. Sk, S.20, 4.5. Die Umlegbarkeit der Multiplikation mit  $a$  von  $f$  auf  $\varphi$  verlangt hier  $a \in C^\infty$ , wie in loc. cit. unten erläutert ist.

Die der Abbildung  $W_a : f \mapsto a \cdot f$  zugeordnete Abbildung  $\tilde{W}_a$  stimmt in diesem Sonderfall mit  $W_a$  überein, ihre Stetigkeit ist offensichtlich. Man schreibt kurz  $a \cdot T := (W_a)'(T)$ .

Eine nur unwesentlich weniger einfache Umformung ist die

## Ableitung einer vF (Ersatz von Sk, S.21 Mitte.)

Die Ableitung  $d_x := \frac{d}{dx}$  ist eine lineare Abbildung der auf  $\mathbb{R}$  definierten differenzierbaren Funktionen in die Menge aller reellen Funktionen, also ist  $W = d_x$  ein möglicher Kandidat. Dafür, dass die Ableitung  $f'$  einer Funktion  $f$  eine reguläre vF  $T_{f'} = T_{d_x(f)}$  erzeugt, ist es hinreichend, dass  $f' \in L^1_{loc}$  ist. Das Umlegen von  $d_x$  von  $f$  auf  $\varphi$  in  $\int f'(x)\varphi(x)dx$  geschieht hier mit einer Produktintegration. Ihre Ausführbarkeit verlangt aber nun eine Einschränkung der zugelassenen  $f$ :  $f' \in L^1_{loc}$  ist dafür nicht ausreichend,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  dagegen schon und soll hier vorausgesetzt werden. (Wegen einer Verallgemeinerung dieser Bedingung s. die Ergänzung „Die Ableitung nicht stetig differenzierbarer Funktionen...“.) Dann gilt  $\int f'(x)\varphi(x)dx = -\int f(x)\varphi'(x)dx$ , und damit ist  $\tilde{d}_x = -d_x$  gefunden, das eine lineare und stetige Selbstabbildung von  $\mathcal{D}$  ist, wie aus der Definition der Konvergenz in  $\mathcal{D}$  folgt. Damit kann man  $T' := (d_x)'(T)$  durch  $\langle T', \varphi \rangle = -\langle T, d_x\varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle$  definieren. In mehreren Veränderlichen setzt man für  $\partial_i$  ( $:= \partial/\partial x_i$ ) entsprechend  $\tilde{\partial}_i = -\partial_i$  und schreibt für  $(\partial_i)'(T)$  einfach  $\partial_i T$ . Die Ableitung ist das einfachste Beispiel einer Operation, für die  $\tilde{W} \neq W$  ist.

Aus der Def. Sk. (14) (S. 22) folgt, dass das Ergebnis einer Ableitung höherer Ordnung von der Reihenfolge der Ableitungen unabhängig ist.

## Produktregel für $a \cdot T$

Es sei  $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $T \in \mathcal{D}'$ . Dann gilt die Produktregel

$$\partial_i(a \cdot T) = (\partial_i a) \cdot T + a \cdot \partial_i T \quad (1)$$

Beweis:

Der Beweis für die Gültigkeit der Produktregel besteht in einer Zusammenführung der beiden soeben in  $\mathcal{D}'$  eingeführten Operationen: Für alle  $\varphi \in \mathcal{D}$  gilt:

$$\begin{aligned} \langle \partial_i(a \cdot T), \varphi \rangle &= -\langle a \cdot T, \partial_i \varphi \rangle = -\langle T, a \partial_i \varphi \rangle = -\langle T, a \partial_i \varphi + (\partial_i a) \varphi - (\partial_i a) \varphi \rangle = \\ &= \langle (\partial_i a) \cdot T, \varphi \rangle - \langle T, a \partial_i \varphi + (\partial_i a) \varphi \rangle = \langle (\partial_i a) \cdot T, \varphi \rangle - \langle T, \partial_i(a \varphi) \rangle = \\ &= \langle (\partial_i a) \cdot T, \varphi \rangle + \langle a \cdot \partial_i T, \varphi \rangle \end{aligned}$$

## Transformation der unabhängig Veränderlichen einer vF

Es sei  $U : x \mapsto y = U(x)$  eine glatte (in allen Komponenten beliebig oft differenzierbare) bijektive Selbstabbildung des  $\mathbb{R}^n$  mit glatter Umkehrung  $U^{-1}$ . Die für gewöhnliche Funktionen sich daraus ergebende Rechenoperation ist  $(W_U f)(x) := f(U(x))$ . Zur Bestimmung von  $\tilde{W}_U$  legt man die Koordinatentransformation  $U$  nach der aus der Analysis bekannten Regel für die Transformation von Integralen von  $f$  nach  $\varphi$  um:

$$\int f(U(x))\varphi(x)dm_x = \int f(y)\varphi(U^{-1}(y)) \left| \frac{\partial U^{-1}}{\partial y} \right| (y) dm_y = \int f(y) \cdot (\tilde{W}_U(\varphi))(y) dm_y \quad (2)$$

Das ergibt also

$$(\tilde{W}_U(\varphi))(x) = \left| \frac{\partial U^{-1}}{\partial x} \right| (x) \varphi(U^{-1}(x)) \quad (3)$$

Damit wird nun die Transformation der unabhängig Veränderlichen von beliebigen vF  $T$  definiert durch

$$W'_U(T) = T \circ \tilde{W}_U, \quad (4)$$

also  $\langle W'_U(T), \varphi \rangle = \langle T, \tilde{W}_U(\varphi) \rangle$ . Ein Sonderfall davon ist die lineare Substitution der Veränderlichen einer vF, die wiederum die beiden in Sk, S. 18 ... 20 angegebenen Umformungen als Sonderfälle enthält.

#### Lineare Substitution der Veränderlichen einer vF

Es sei  $A$  eine reelle, reguläre  $n \times n$ -Matrix,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Durch diese beiden Größen ist die inhomogen lineare (affine), bijektive Selbstabbildung  $U_{A,b}$  des  $\mathbb{R}^n : y = U_{A,b}(x) = Ax + b$  bestimmt. Die Spezialisierung von (2) auf diesen Sonderfall ergibt

$$\begin{aligned} \langle T_{f(Ax+b)}, \varphi(x) \rangle &= \int f(Ax+b) \varphi(x) dm = \frac{1}{|\det A|} \int f(y) \varphi[A^{-1}(y-b)] dm = \quad (5) \\ &= \frac{1}{|\det A|} \langle T_{f(y)}, \varphi[A^{-1}(y-b)] \rangle \end{aligned}$$

Das zugehörige  $\tilde{W}_{U_{A,b}}$  gemäß (3) ist daraus unmittelbar ablesbar. Für beliebige  $T$  ist dann die affine Transformation der Veränderlichen durch  $W'_{U_{A,b}}(T) := T \circ \tilde{W}_{U_{A,b}}(\varphi)$  gegeben.

#### Die Kettenregel für umkehrbare affine Transformationen der Veränderlichen in vF

Es sei  $B = A^{-1}$ , also mit  $y = Ax + b : x = B(y - b)$  oder in Komponenten

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i, \quad x_i = \sum_{r=1}^n b_{ir} (y_r - b_r);$$

und deswegen  $\frac{\partial x_l}{\partial y_i} = b_{li}$ . Dann gilt die Kettenregel:

$$\partial_{x_k} \langle T(Ax+b) \rangle = \partial_{x_k} W'_{U_{A,b}}(T) = \sum_i a_{ik} W'_{U_{A,b}}(\partial_{y_i} T) = \sum_i a_{ik} \langle \partial_{y_i} T(Ax+b) \rangle. \quad (6)$$

Der Beweis erfolgt durch Anwenden beider Seiten auf ein  $\varphi \in \mathcal{D}$  unter Beachtung der Festsetzungen. Die linke Seite ergibt wegen  $1/|\det A| = |\det B|$

$$\langle \partial_{x_k} \langle T(Ax+b) \rangle, \varphi \rangle = - \langle \langle T(Ax+b) \rangle, \partial_{x_k} \varphi \rangle = - \langle T, \partial_{x_k} \varphi(B(y-b)) \rangle |\det B|$$

Die rechte Seite von (6) ergibt unter Verwendung von  $\sum_i b_{li} a_{ik} = \delta_{lk}$

$$\begin{aligned} \sum_i a_{ik} \langle \langle \partial_{y_i} T(Ax+b) \rangle, \varphi \rangle &= \sum_i a_{ik} \langle \partial_{y_i} T, \varphi(B(y-b)) \rangle |\det B| = \\ - \sum_i a_{ik} \langle T, \sum_l \partial_{x_l} \varphi(B(y-b)) \frac{\partial x_l}{\partial y_i} \rangle |\det B| &= - \sum_l \sum_i b_{li} a_{ik} \langle T, \partial_{x_l} \varphi(B(y-b)) \rangle |\det B| = \\ &= - \langle T, \partial_{x_k} \varphi(B(y-b)) \rangle |\det B|. \end{aligned}$$

Die beiden Seiten sind also dieselben Abbildungen  $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}$ , was die Behauptung beweist.