Die Ableitung nicht stetig differenzierbarer Funktionen im Sinne von $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
(Ersatz für Sk, S. 25ff)

Der Ausgangspunkt für die Definition der Ableitung einer vF war die Forderung, dass für geeignete differenzierbare f $\quad T_f' = T_{f'}$ gelten soll. Die Rechnung, die die Definition der Ableitung in $\mathcal{D}'$ bgründet, ist eine Produktintegration (partielle Integration), die für $f \in C^1(\mathbb{R})$ immer zugelassen ist: $< T_{f'}, \varphi >= \int f'\varphi\,dx = -\int f\varphi' dx = - < T_f, \varphi' >$. Im Folgenden werden Verallgemeinerungen der Menge untersucht, der f angehören muss, damit man seine vF-Ableitung noch konkret angeben kann.

a) Zunächst soll einmal festgehalten werden, für welche Klasse von Funktionen die vF-Ableitung T_f' noch von einer ggf. etwas allgemeiner aufgefassten Ableitung von f erzeugt wird (und damit regulär ist). Dazu genügt der Hinweis darauf, dass es für die Durchführbarkeit der Produktintegration hinreichend ist, wenn f ein unbestimmtes Integral einer (hier lokal-)integrierbaren Funktion v ist: $f = \int_a^x v(t)dt$. Dann gilt noch $-\int_{-a}^b f(t)\varphi'(t)dt = \int_{-a}^b v(t)\varphi(t)dt - f(t)\varphi(t)|_{-a}^b$, und wegen des Verschwindens der Randterme für $a, b \to \infty$ folgt für solche f: $T_f' = T_v$, wobei f zwar stetig, aber i. Allg. nur außerhalb einer Menge von höchstens abzählbarer Mächtigkeit differenzierbar ist und seine Ableitung dort mit v übereinstimmt. Schreibt man in diesem Sinne $v = f'$, dann gilt für solche f also noch $T_f' = T_{f'}$.

b) In einem weiteren Schritt sollen noch allgemeinere f zugelassen werden. Zum Zwecke einer sinnvollen Eingrenzung wird zunächst daran erinnert, dass die Abbildung $\mathfrak{T}_r : L^1_{loc} \to \mathcal{D}'_{reg}$ auf die Menge $\mathcal{D}'_{reg}$ der regulären vF, gegeben durch $\mathfrak{T}_r(f) \mapsto T_f$, linear ist. Es liegt somit nahe, als Anwärter für diese allgemeinere Klasse von Funktionen solche f zu betrachten, die sich als Summe $f = g + h$ darstellen lassen, wobei g zur unter a) eingeführten Menge gehört und h zwar keine reguläre vF-Ableitung hat, jedoch eine singuläre Distribution von einfacher, übersichtlicher Art. Ist g Stammfunktion zu w, dann erhält man wegen der vorhin bemerkten Linearität von $\mathfrak{T}_r$ und jener der Ableitung in $\mathcal{D}'$

$$T_f' = T_{g+h}' = (T_g + T_h)' = T_g' + T_h' = T_w + T_h' \tag{1}$$

Geht man schrittweise vor, dann wird man für h besonders einfach gebaute Funktionen wählen, deren vF-Ableitung bekannt ist. Das wohl einfachste und bekannteste Beispiel ist die Stufenfunktion H. Wegen der Linearität von $\mathfrak{T}_r$ ist es eine unwesentliche Verallgemeinerung, statt des genormten H mit der Sprungstelle in $x = 0$ eine Linearkombination von Stufenfunktionen $H_{x_i} = H(x - x_i)$ mit Sprungstellen in x_i zu nehmen, also $h = \sum_{i=1}^n \Delta_i H_{x_i}$ mit Sprunghöhen Δ_i in x_i.

Bsp. (S. Sk, S. 25f):
Wählt man f in endlich vielen Punkten x_i unstetig mit Sprunghöhen Δ_i und dazwischen stetig differenzierbar, dann lässt es sich, wie in b) angegeben, in die Summe einer stetigen, außerhalb der x_i differenzierbaren Funktion g zerlegen, die Stammfunktion einer stückweise stetigen (im Sk. mit $[f']$ bezeichneten) Funktion w mit Sprungstellen in den x_i ist, und einer Funktion h, wie sie oben beschrieben wurde.

$$f = g + h \quad h = \sum_{i=1}^n \Delta_i H_{x_i} \quad . \tag{2}$$

Die Anwendung von (1) ergibt mit Sk, S. 23 (15) dann gerade

$$T_f' = T_w + \sum_{i=1}^n \Delta_i \delta_{x_i} \tag{3}$$

Bemerkung : Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass die in a) behandelte Erweiterung der Funktionenklasse von C^1-Funktionen auf nur fast überall differenzierbare Stammfunktionen integrierbarer Funktionen schon notwendig ist, um z. B. das im Sk. angegebene Beispiel behandeln zu können. Sie entspringt also keinem anwendungsfernen Verallgemeinerungswahn. Da hier die Fast-Überall-Differenzierbarkeit (f.ü.-Differenzierbarkeit) einer Funktion ins Spiel kommt, sei sie in der hier benötigten Allgemeinheit erklärt: Die f.ü.-Ableitung einer Funktion f wird überall dort, wo f ableitbar ist, wie üblich aufgefasst. In Punkten, wo dies nicht der Fall ist, dann aber die beiden einseitigen Ableitungen vorhanden sein müssen, werden diese als die beiden einseitigen Grenzwerte von f' betrachtet. In diesem Sinne ist die f.ü.-Ableitung von f die mit w bezeichnete Funktion. Damit gilt im Beispiel, wenn man im besprochenen Sinne w mit f' bezeichnet, *nicht* $T_f' = T_{f'}$, was sich übrigens nur mit der genauen Bezeichnung T_f für reguläre vFn bündig und unmissverständlich schreiben lässt.

Zu Sk, S 31 u.:

Nachweis der Notwendigkeit :

Sei $x^n \cdot T = 0$. $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$ wird durch sein Taylorpolynom $(n-1)$ten Grades und das Restglied in Lagrange-Form dargestellt :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(\xi(x)), \quad 0 \le \xi \le x.$$

Mit der Bezeichnung $I^{n-1}(\varphi)(x)$ für die obige Summe gilt für

$$\chi(x) := \frac{1}{x^n}[\varphi(x) - I^{n-1}(\varphi)(x)] = \frac{\varphi^{(n)}(\xi(x))}{n!}$$

$\chi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$, da das Restglied einer C^∞-Funktion selbst eine solche ist; dies folgt aus der Integraldarstellung $r_n = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n \varphi^{(n+1)}(t)dt$ desselben. Man wählt ein $\eta(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, das in einer Umgebung von $x = 0$ gleich 1 ist . Damit sei

$$\psi(x) := \frac{1}{x^n}[\varphi(x) - \eta(x) I^{n-1}(\varphi)(x)]$$

Dann ist $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^1)$, es ist also erlaubt, ψ in vF einzusetzen, was in der folgenden Rechnung an einer Stelle geschieht:

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \eta I^{n-1}(\varphi)\rangle + \langle T, x^n\psi\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \langle T,\ \eta x^k\rangle + \langle x^n T, \psi\rangle =$$

(das letzte Glied verschwindet nach Vorauss.)

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k c_k\ \varphi^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \langle \delta^{(k)}, \varphi\rangle$$

mit

$$c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \langle T, \eta x^k\rangle$$

Die c_k sind willkürliche Konstanten, da η innerhalb der Vorgabe frei wählbar ist.