

Analytische Mechanik

E. Schachinger

12. Juli 2005

Diese Vorlesungsunterlage wurde mit Unterstützung von Herrn Univ. Prof. Dr. B. SCHNIZER, welcher mir liebenswürdiger Weise seine gesamten Vorlesungsunterlagen zur Verfügung gestellt hat, erarbeitet. Weiters danke ich Herrn Univ. Prof. Dr. F. SCHÜRRER für viele wertvolle Hinweise zur Fluid-Mechanik. Schließlich bin ich auch Frau Ingrid REIWEGER zu Dank verpflichtet. Sie hat sich der Mühe unterzogen hat diese Vorlesungsunterlage kritisch durchzuarbeiten.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Elementare NEWTONSche Mechanik	4
2.1	Die NEWTONSchen Gesetze	4
2.2	Die Teilchenbahn	6
2.3	Gleichförmig geradlinige Bewegung; Inertialsystem	10
2.4	Impuls und Kraft	11
2.5	Erhaltungssätze	13
2.5.1	Impuls- und Drehimpulserhaltung	13
2.5.2	Energieerhaltung	16
2.5.3	Integrale der Bewegung	19
2.6	Der Phasenraum	21
2.7	Systeme von zwei Massenpunkten	23
2.7.1	Das Zweiteilchensystem mit inneren Kräften	23
2.7.2	Das KEPLER-Problem der Bewegung zweier Himmelskörper	24
2.7.3	Schwerpunkts- und Relativimpuls	29
2.8	Systeme endlich vieler Teilchen	29
2.8.1	Wichtige Sätze	29
2.8.2	Das abgeschlossene n -Teilchen System	32
2.8.3	Der elastische Stoß zweier Massen	33
2.8.4	Virial und zeitliche Mittelwerte	37
2.9	Bezugssysteme	38
2.9.1	Die GALILEI-Transformation	38
2.9.2	Das linear beschleunigte Bezugssystem	41
2.9.3	Das rotierende Bezugssystem	42
3	Allgemeine Formulierung der Punktmechanik	45
3.1	Die LAGRANGE-Gleichungen erster Art	45
3.1.1	Klassifikation der Zwangsbedingungen	47
3.1.2	Erhaltungsgrößen	48
3.2	Das D'ALEMBERTSche Prinzip	50
3.2.1	Formulierung für einen Massenpunkt	50

3.2.2	Formulierung für Systeme von Massenpunkten	51
3.3	Die LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art	53
3.3.1	Verallgemeinerte (generalisierte) Koordinaten	53
3.3.2	Elimination der Zwangskräfte	53
3.3.3	Die LAGRANGE-Funktion	54
3.3.4	Ein Beispiel	58
3.3.5	Erhaltungsgrößen	60
3.4	Das HAMILTON-Prinzip	66
3.4.1	Die HAMILTONSchen Bewegungsgleichungen	67
3.4.2	Die POISSON-Klammern	68
3.5	Raum-Zeit Symmetrien	69
3.6	Das NOETHER-Theorem	74
4	Schwingungen, Oszillatoren	79
4.1	Eindimensionale Bewegung	79
4.1.1	Lineare Kraft. Harmonischer Oszillator	80
4.1.2	Anharmonische Schwingung	85
4.1.3	Harmonischer Oszillator mit Dämpfung	87
4.1.4	Harmonischer Oszillator mit zusätzlicher zeitabhängiger Kraft. Erzwungene Schwingung. Resonanz.	89
4.2	Zwei Freiheitsgrade. Bewegung in zwei Raumrichtungen	94
4.2.1	Linearer Oszillator	94
4.2.2	Die POINCARÉ-Abbildung	103
4.2.3	Das HÉNON-HEILES-System. Geordnete und chaotische Bewegung	103
4.3	Die Saitenschwingung	110
5	Der starre Körper	120
5.1	Die Kinematik des starren Körpers	120
5.1.1	Die Winkelgeschwindigkeit	121
5.1.2	Die EULERSchen Winkel	124
5.2	Der Trägheitstensor	126
5.2.1	Die kinetische Energie	126
5.2.2	Der Drehimpuls	128
5.2.3	Hauptachsentransformation	129
5.2.4	Der Satz von STEINER	132
5.3	Die Dynamik des starren Körpers	133
5.3.1	Die EULERSchen Gleichungen	133
5.3.2	Rotation um eine freie Achse	135
5.3.3	Der kräftefreie symmetrische Kreisel	137

6	Begriffe der Fluid-Mechanik	142
6.1	Einleitung	142
6.2	Grundbegriffe	143
6.2.1	Massendichte, Druck	143
6.2.2	Strömung, Stromlinie	144
6.2.3	Die Änderungsrate	148
6.2.4	Die Kontinuitätsgleichung	150
6.2.5	Die Zustandsgleichung	151
7	Das ideale Fluid	153
7.1	Definition	153
7.2	Die EULERSchen Bewegungsgleichungen	155
7.3	Die BERNOULLI-Gleichung	156
7.4	Die Wirbelstärke	157
7.5	Die Wirbelgleichung	162
7.6	Die stationäre Strömung um eine Tragfläche	164
7.6.1	Die Zirkulation	165
7.6.2	Die KUTTA-JOUKOWSKI Hypothese	167
8	Elementare Theorie der viskosen Strömung	169
8.1	Einführung	169
8.2	Die Bewegungsgleichung der zähen Strömung	173
8.2.1	REYNOLDS-Zahl	173
8.3	Einfache viskose Strömungen	175
8.3.1	Planparallele Schicht- (Scher-)Strömung	175
8.4	Konvektion und Diffusion von Wirbelstärke	182
9	Wellen in Fluids	184
9.1	Einführung	184
9.2	Oberflächenwellen auf tiefem Wasser	185
9.3	Die Gruppengeschwindigkeit	191
9.4	Schallwellen	191
A	Etwas Mathematik	195
A.1	Krummlinige Koordinaten	195
A.1.1	Ebene Polarkoordinaten	195
A.1.2	Zylinderkoordinaten	196
A.1.3	Kugelkoordinaten	197
A.2	Vektoranalysis	198
A.2.1	Definitionen und Sätze	198
A.2.2	Der ∇ -Operator in krummlinigen Koordinaten	200
A.3	Variationsrechnung	201

A.3.1	Eine abhängige Variable	201
A.3.2	Mehrere abhängige Variable	204
A.3.3	Variationsprobleme mit Nebenbedingungen	205
A.4	Tensoren	207
A.4.1	Orthogonale Transformationen	207
A.4.2	Tensordefinition	209
B	Spezielle Relativitätstheorie und Relativistische Mechanik	212
B.1	Einführung	212
B.1.1	Das Relativitätsprinzip	212
B.1.2	Prinzip der Konstanz der Vakuumlichtgeschwindigkeit c	213
B.2	Die LORENTZtransformationen	216
B.3	Folgerungen aus den LORENTZ-Transformationen und deren experimentelle Überprüfung	218
B.3.1	Relativierung des Begriffes der Gleichzeitigkeit	219
B.3.2	Zeitdilatation	219
B.3.3	LORENTZ-Kontraktion	224
B.3.4	Additionstheorem der Geschwindigkeiten	225
B.4	Verallgemeinerung der LORENTZ-Transformation	226
B.5	Vierdimensionale Vektorrechnung, die MINKOWSKI-Welt	227
B.6	Relativistische Kinematik	231
B.7	Relativistische Dynamik	233
B.7.1	Der relativistische Energiesatz	235
B.8	Die relativistische KEPLER-Bewegung	235

Literatur

1. T. FLIESSBACH
Mechanik
Lehrbuch zur Theoretischen Physik I, 2. Aufl.
Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1996
ISBN 3-86025-686-6
2. F. SCHECK
Mechanik
4. Auflage
Springer-Verlag, Heidelberg 1994
ISBN 3-540-56781-X
3. R.M. DREIZLER und C.S. LÜDDE
Theoretische Physik I: Theoretische Mechanik
Springer-Verlag, Heidelberg 2003
ISBN 3-540-44366-5
4. R.J. JELITTO
Theoretische Physik 1: Mechanik I
Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1982
ISBN 3-400-00491-X
5. R.J. JELITTO
Theoretische Physik 2: Mechanik II
Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden 1983
ISBN 3-400-00492-8
6. H. IRO
Klassische Mechanik
3. Auflage
Universitätsverlag Rudolf Trauner, Linz 1993
ISBN 3-85320-638-7
7. D.J. ACHESON
Elementary Fluid Dynamics

Clarendon Press, Oxford 1990
ISBN 0-19-859660-0 (pbk.)

8. A.J. CHORIN und J.E. MARSDEN
A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics
Springer-Verlag, Heidelberg 1979

Kapitel 1

Einleitung

Die Mechanik ist nicht nur das älteste Teilgebiet der Physik, sie stellt bis heute die Grundlage für die ganze theoretische Physik dar. So ist etwa die Quantenmechanik ohne klassische Mechanik kaum verständlich, vielleicht nicht einmal formulierbar. Aber auch jede klassische Feldphysik, wie etwa die Elektrodynamik, baut auf dem von der Mechanik vorgegebenen Fundament auf.

Die analytische Mechanik als Teil der theoretischen Physik kann auch als Fallbeispiel für die Beziehungen zwischen den drei Disziplinen *Experimentalphysik*, *theoretische Physik* und *Mathematik* herangezogen werden. Die *Experimentalphysik* ist eine *Erfahrungswissenschaft*. Sie beobachtet die Phänomene in der Natur und befragt diese durch systematische Experimente. Dabei werden empirische Gesetzmäßigkeiten ermittelt. Zunächst werden die *physikalischen Größen* (z.B. Länge, Geschwindigkeit, Beschleunigung, allgemein *Observable* genannt) definiert. Dies geschieht durch Angabe der Manipulationen und Rechnungen, die in einem konkreten Fall ausgeführt werden sollen, um den Wert der betreffenden Größe zu erhalten (*operationelle Definition*). Ist eine Anzahl von physikalischen Größen eingeführt worden (etwa für den Erfahrungsbereich der Geometrie die Größen 'Länge' und 'Winkel'), dann kann es sein, daß unter bestimmten Bedingungen stets eine gesetzmäßige Beziehung, das *empirische Gesetz*, zwischen den Maßzahlen gewisser Größen angenähert besteht. Z.B.: in der Geometrie besteht in einem rechtwinkligen Dreieck zwischen den anliegenden Seiten (= Katheten) a , b und der Hypotenuse c die Beziehung $c^2 = a^2 + b^2$.

Im Gegensatz dazu ist die *Mathematik* eine *Geisteswissenschaft*. Ihr Werkzeug ist die Phantasie des Mathematikers, der spekulativ logische Strukturen ersinnt, etwa das System der Zahlen oder die euklidische Geometrie. Er wird dabei oft von realen Erfahrungen und empirischen Zusammenhängen geleitet [man denke etwa an die Schaffung der Geometrie (= Erdmessung) in Zusammenhang mit der Feldmeßkunst]. Im Prinzip werden die *mathematischen*

Begriffe und die *mathematischen Axiome* (letztere geben Beziehungen zwischen Begriffen an, welche dadurch erst implizit definiert werden) willkürlich, wenn auch zweckmäßig, vor allem widerspruchsfrei, gesetzt. Durch logische Analyse und Deduktion (wobei die schöpferische Phantasie ebenfalls beteiligt ist) schafft der Mathematiker *mathematische Theorien* (= logische Strukturen = Zusammenhänge der mathematischen Begriffe).

Die *theoretische Physik* versucht nun einen Zusammenhang (Abbildung) mathematischer Begriffe und Theorien mit den physikalischen Größen herzustellen, so daß die Zusammenhänge der empirischen Gesetze in den physikalischen Größen in den Zusammenhängen (logischen Strukturen) der zugeordneten mathematischen Begriffe widergespiegelt werden. Bewährt sich eine solche Zuordnung, indem sie neue Aussagen oder Voraussagen über den Zusammenhang und den Ablauf der empirischen Größen gestattet, wird sie zur *physikalischen Theorie*. Die physikalischen Größen und der zugeordnete mathematische Begriff verschmelzen zum *physikalischen Begriff*.

Die einfachen Grundannahmen über die Natur der Phänomene, die aus dem Erfahrungsmaterial abstrahiert worden sind, sind die *physikalischen Axiome*. Die *physikalischen Gesetze* können dann mittels der mathematischen Theorie aus den physikalischen Axiomen deduziert werden. Wurde eine Theorie in einem bestimmten Bereich nicht falsifiziert (entweder durch Beobachtung oder gezieltes Experiment) und sind auch ihre Gültigkeitsgrenzen, außerhalb derer sie falsifiziert wurde, bekannt, so spricht man von einer *abgeschlossenen Theorie*.

Die analytische Mechanik ist eine solch abgeschlossene Theorie. Sie gilt für die Beschreibung von Bewegungen, wenn die Massen und Längen nicht zu klein sind (dort gilt dann die Quantentheorie) und auch nicht zu groß sind (dann könnte die allgemeine Relativitätstheorie gelten). Weiters müssen die Geschwindigkeiten klein im Vergleich zur Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 sein, da sonst die spezielle Relativitätstheorie anzuwenden ist.

Die analytische Mechanik verwendet vor allem die Begriffe der Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung und Kraft. Die zugehörigen physikalischen Axiome sind die *NEWTONschen Axiome*. Die verwendete mathematische Theorie ist die der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die physikalischen Gesetze deduziert man aus den Differentialgleichungen und sie beschreiben die Bewegungen und deren Gesetzmäßigkeiten. Das Ziel der Mechanik ist die *Beschreibung der Bewegungen und Verformungen von Körpern*. Diese Beschreibung soll so geartet sein, daß sie Vorhersagen über das Verhalten von Körpern ermöglicht. Sie hat also das Auffinden von Gesetzen zum Ziel; dies sind Aussagen, die das Auffinden zeitlich unveränderlicher Eigenschaften mechanischer Vorgänge behaupten. Daß es solche Eigenschaften gibt, ist nicht selbstverständlich, es wird aber gezeigt werden, daß im Rahmen der Beobachtungsgenauigkeit solche Eigenschaften vorhanden sind.

Diese beziehen sich allerdings meist nicht auf unmittelbare Wahrnehmungen bezüglich der mechanischen Vorgänge, sondern auf durch Abstraktion gewonnene Merkmale derselben. Beispiele solcher unveränderlicher Eigenschaften sind die Erhaltung der Energie oder des Drehimpulses.

Die Beobachtungen mechanischer Vorgänge sind zunächst einmal Sinneswahrnehmungen. Da wir aber zeitlich und räumlich unveränderliche Gesetze auffinden wollen, also Eigenschaften von ganzen Klassen mechanischer Vorgänge, müssen die einzelnen Beobachtungen aufgezeichnet und verglichen werden können. Man muß also den Beobachtungen zu ihrer Beschreibung mitteilbare Größen zuordnen. Man nimmt für die Beschreibung insbesondere mathematische Begriffe, die sich für eine mitteilbare Beschreibung besonders gut eignen. Diese Beschreibung muß vor allem in der Lage sein Ereignisse zu erfassen, die an verschiedenen Punkten des Raumes zu verschiedenen Zeiten vor sich gehen. Als mathematisches Modell zur Beschreibung des Raumes wird eine Geometrie verwendet - in der klassischen Mechanik die euklidische Geometrie. Da die euklidische Geometrie eine Struktur zum Gegenstand hat, deren Elemente Punkte, Geraden und Ebenen sind mit ihren Beziehungen untereinander (Enthaltensein, Schneiden, Senkrechtstehen, usw.), muß man eine Zuordnung dieser abstrakten Begriffe zu wirklichen Dingen und ihrer abstrakten Beziehungen zu wirklichen Beziehungen dieser Dinge herstellen, so daß diese wirklichen Dinge innerhalb der durch die Wahrnehmungsgenauigkeit vorgegebenen Grenzen, die Struktur der euklidischen Geometrie widerspiegeln. Insbesondere wollen wir Gerade als die Wege von Lichtstrahlen definieren, Punkte und Ebenen durch einander schneidende Geraden. Dann werden die Punkte des Raumes mit Hilfe eines Koordinatensystems geordneten Tripeln reeller Zahlen zugeordnet.

Um nun auch die Zeitordnungsereignisse durch Zahlen beschreiben zu können, baut man ein Gerät, das eine Aufeinanderfolge (geordnete Menge) von Ereignissen liefert, welchen man reelle Zahlen zuordnen kann. Dieses Gerät, versehen mit einer Vorrichtung, welche die den Ereignissen zugeordnete reelle Zahl, die Zeit, anzeigt, heißt *Uhr*. Um die Zeit eines beobachtbaren Ereignisses festzulegen, bringt man die Uhr an den Ort des Ereignisses und liest zum Zeitpunkt des Ereignisses die von der Uhr angezeigte Zeit ab.

Durch diese Vorgangsweise sind jedem Ereignis, das an einem bestimmten Punkt des Raumes zu einer bestimmten Zeit stattfindet, drei Raum- und eine Zeitkoordinate zur raumzeitlichen Beschreibung zugeordnet.