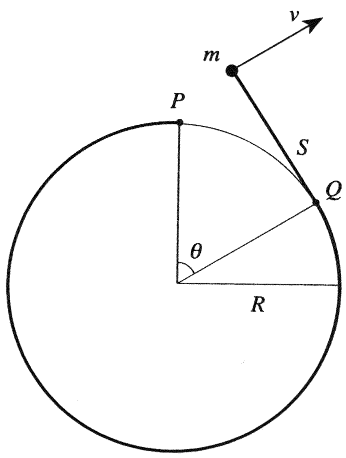
Übungen Analytische Mechanik WS 2005: 8. Übungsblatt

1. Abrollender Faden



Ein Massenpunkt m ist am Ende eines langen, masselosen Fadens befestigt. Das andere Ende des Fadens ist an einem unbeweglichen Zylinder vom Radius R befestigt. Anfangs ist der Faden vollständig am Zylinder aufgewickelt und die Masse berührt den Zylinder. Es wirken keine externen Kräfte. Zur Zeit $t = 0$ wirkt auf die Masse ein Impuls, welcher in radialer Richtung von der Zylinderoberfläche weg orientiert ist. Dies gibt der Masse eine Anfangsgeschwindigkeit v_0. Dies führt wiederum dazu, dass der Faden nunmehr abrollt. Es sei nun der Punkt P die Anfangsposition der Masse und der Punkt Q der Kontaktpunkt zwischen Faden und Zylinder.

   (a) Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung $\theta(t)$.

   (b) Begründen Sie die Wahl Ihrer Lösungsmethode.

   (c) Auf der Basis der unter (a) erhaltenen Lösung bestimmen Sie den Drehimpuls der Masse m in Bezug auf das Zentrum des Zylinders. Bleibt der Drehimpuls erhalten? Warum? Bleibt die Energie erhalten? Warum? Hinweis:
$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 = \frac{d^2}{dt^2}\frac{x^2}{2}.$$

2. Massepunkt in einem rotierenden Reifen:

   Ein Massepunkt m kann sich nur auf der Innenseite eines undendlich dünnen Reifens vom Radius R bewegen. Der Reifen rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die vertikale Achse, welche durch den Reifenmittelpunkt geht.

   (a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes.

   (b) Begründen Sie die Wahl der Lösungsmethode.

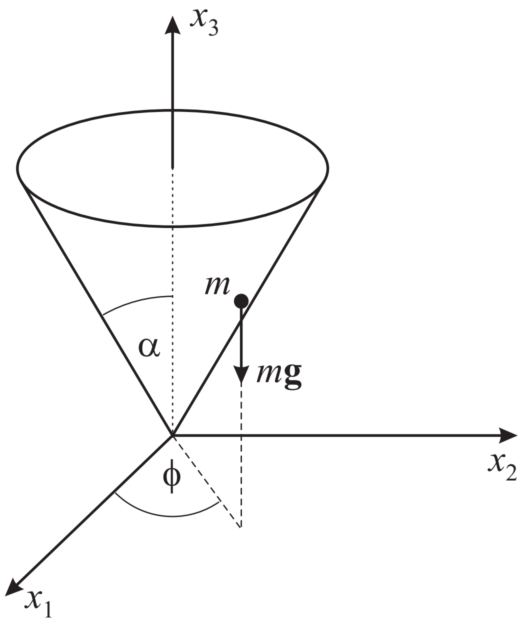
   (c) Bestimmen Sie die kritische Winkelgeschwindigkeit Ω, unterhalb der der Refenboden eine stabile Gleichgewichtsposition für den Massepunkt darstellt. (Hinweis: Untersuchen Sie kleine Auslenkungen um die Ruheposition und bestimmen Sie die Bewegungsgleichung. Welche Bedingung ist einzuhalten, damit die Bewegung des Massepunktes auf den Boden des Reifens begrenzt bleibt?)

(d) Finden Sie die stabile Gleichgewichtsposition für $\omega > \Omega$. Überprüfen Sie die Stabilität, indem Sie kleine Auslenkungen um diese Gleichgewichtsposition untersuchen. (Hinweis: Im Gleichgewicht ist die verallgemeinerte Beschleunigung gleich Null.)

3. Coriolis Kraft:

   Ein Körper der Masse m fällt aus seiner Ruhelage (Höhe h über der Erdoberfläche, geographische Breite φ) auf die Erde. Bestimmen Sie die seitliche Versetzung des Körpers aufgrund der Coriolis Kraft. (Hinweis: Vernachlässigen Sie Terme $\propto \omega^2$, mit ω der Erdrotation.)

4. Bewegung im Kreiskegel



Ein punktförmiges Teilchen m rollt auf der Innenseite eines Kreiskegels. Auf das Teilchen wirkt die Gravitationskraft

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_3.$$

Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Teilchens.

Begründen Sie die Wahl Ihrer Lösungsmethode.