Übungen Analytische Mechanik WS 2005: 3. Test, Teil 2

1. Die Lagrangefunktion einer eindimensionalen Bewegung ist durch

$$\mathcal{L}(p,q) = e^{\gamma t}\left(\frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2\right)$$

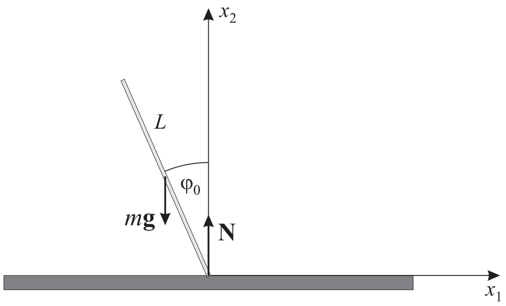
gegeben, mit γ, m und k positiven Konstanten. Geben Sie die Bewegungsgleichungen an. Gibt es Konstante der Bewegung? Wie würden Sie die Bewegung beschreiben?

Wir führen eine Punkttransformation auf eine neue verallgemeinerte Koordinate

$$s = \exp\left(\frac{\gamma t}{2}\right) q$$

durch. Wie lautet nun die Lagrangefunktion? Wie lautet die Bewegungsgleichung? Gibt es nun Konstante der Bewegung? Wie interpretieren Sie das Ergebnis? Beachten Sie:

$$\ddot{s} = \frac{1}{2}\frac{d\dot{s}^2}{ds}.$$

2. 

Ein dünner, homogener Stab der Masse m und der Länge L, welcher mit einem Ende auf einer reibungsfreien Ebene ruht, wird aus seiner Ruhelage (charakterisiert durch den Winkel φ_0) entlassen.

Bestimmen Sie die Kraft **N**, welche von der Ebene auf den Stab zu einer Zeit ausgeübt wird, welche nur infinitesimal größer ist als jene Zeit, zu welcher der Stab entlassen wurde. Das Trägheitsmoment um die horizontale Achse des Stabs im Massezentrum ist mit $mL^2/12$ gegeben.

3. Drei Massen der Massen $m_i = m$, $i = 1,2,3$ sind über idente, masselose Federn der Federkonstante k verbunden und auf einem glatten Ring äquidistant angeordnet. Der Ring ist im Raum fixiert. Vernachlässigen Sie Gravitation und Reibung. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen des Systems und die Art der zugeordneten Schwingungen. Betrachten Sie kleine Auslenkungen x_i, $i = 1,2,3$ aus der Gleichgewichtslage!

4. Für ein ideales Fluid gilt die Eulersche Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \nabla\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^2\right) = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \chi.$$

Weiters gilt, unabhängig davon ob das Fluid inkompressibel ist oder nicht, das Massenerhaltungsgesetz:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\mathbf{u} = 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\right) = \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho}\nabla\right)\mathbf{u} - \frac{1}{\rho}\nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p$$

gilt. Leiten Sie daraus folgendes ab:
Ist p eine Funktion von ρ allein, so ist die Wirbelgleichung ident zum Fall des inkomressiblen Fluids konstanter Dichte, nur dass $\boldsymbol{\omega}$ durch $\boldsymbol{\omega}/\rho$ zu ersetzen ist.