Kapitel 2

Begriffe und Konzepte

2.1 Das Ereignisintervall, die Eigenzeit

Wir wollen nun im Prinzip die Bewegung eines Körpers unter Einwirkung der Schwerkraft untersuchen und suchen deshalb in der Raumzeit nach der Weltlinie des Körpers. Diese ist eine Menge aufeinanderfolgender Ereignisse in der Geschichte des Körpers. Jedes Ereignis ist wiederum ein Punkt in der Raumzeit, welcher durch vier Koordinaten x^i definiert wird. (Üblicherweise wird x^0 als die Zeitkoordinate und x^1, x^2, x^3 werden als die drei Raumkoordinaten gewählt; eine Zuordnung, welche nicht notwendig ist.) Dabei stellt man sich ein Gitter aus starren Maßstäben vor und an jeder Schnittstelle befindet sich eine Standarduhr. Alle diese Uhren werden über Lichtsignale synchronisiert. Somit kann für jedes Ereignis $\mathbf{r}$ und t abgelesen werden.

Einstein behauptete nun, daß physikalische Ereignisse (quantenmechanische Effekte ausgenommen) unabhängig von unseren Beobachtungen sind; deshalb müssen physikalische Gesetze durch Gleichungen beschrieben werden können, welche eine von der Wahl der Koordinaten x^i unabhängige Form haben. Ereignisse werden nur durch solche Gesetze beschrieben und die zugehörigen Gleichungen müssen *kovariant* sein. Diese Forderung ist das *Prinzip der allgemeinen Kovarianz.* Die Newtonschen Gesetze und die Gleichungen sind im allgemeinen nicht kovariant, da sie nur in Inertialsystemen gelten: die Koordinatengitter dürfen sich nicht drehen und sie dürfen auch nicht beschleunigen. Diese Theorien sind beschränkt kovariant: ihre Gesetze lassen sich unter Verwendung von Vektoren formulieren, sodaß innerhalb erlaubter Inertialsysteme alle *räumlichen* Koordinaten zugelassen sind. Wir verlangen aber nunmehr *raumzeitliche Kovarianz*!

Zur Beschreibung der Weltlinie des Körpers wählen wir zunächst eine parametrische Darstellung. Dies ist ähnlich der Newtonschen Mechanik, in welcher die Bahn des Körpers etwa durch $\mathbf{r}(t)$ dargestellt wird. In der Raumzeit ist dies aber nicht günstig, da t *kein* absoluter *Parameter* ist, sondern

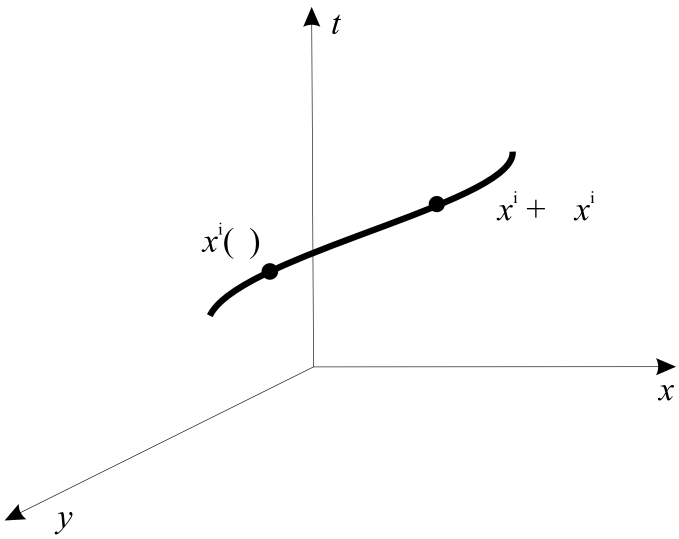

Abbildung 2.1: Ein Ereignispaar.

nur eine weitere Koordinate, nämlich x^0. Wir wollen aber einen Parameter τ, welcher entlang der Weltlinie von der Vergangenheit in die Zukunft zunimmt. Dann würden die vier Funktionen $x^i(\tau)$ eine kovariante Beschreibung zulassen, da τ in keinem Zusammenhang mit dem Koordinatensystem steht. Wir wählen für τ die *Eigenzeit* des Körpers, das ist jene Zeit, welche von einer mit dem Körper bewegten Standarduhr angezeigt wird. τ ist ganz offensichtlich ein *invarianter Parameter.*

In der Abb. 2.1 haben wir zwei Ereignisse auf der Weltlinie, welche das Ereigniszeitinterval $\Delta\tau$ auseinander liegen. Wenn wir nun annehmen, daß im frei fallenden System die spezielle Relativitätstheorie gilt, so folgt,

$$\begin{aligned} \Delta\tau^2 &= \Delta t^2 - \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}{c^2} \\ &= \Delta t^2 - \frac{|\Delta \mathbf{r}|^2}{c^2}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Diese Gleichung stellt die Grundlage der speziellen Relativitätstheorie dar.

Die beiden Ereignisse aus Abb. 2.1 stellen ein *Ereignispaar* dar und es ist offensichtlich auch möglich, daß $\Delta\tau = 0$ ist. Dann folgt:

$$\frac{|\Delta \mathbf{r}|}{\Delta t} = \pm c \tag{2.2}$$

und der Körper bewegt sich offensichtlich mit Lichtgeschwindigkeit. Er liegt auf der Weltlinie eines Lichtstrahls. Grundsätzlich haben wir drei Arten von Intervallen $\Delta\tau$:

1. $\Delta\tau$ ist *reell*. Die Ereignisse sind *zeitartig*, sie gehören der Weltlinie eines Materieteilchens an. $\Delta\tau$ ist dann die Eigenzeit zwischen den beiden Ereignissen.

2. $\Delta\tau$ ist *imaginär*. Das Ereignisintervall ist *raumartig*. Die Ereignisse können nicht auf einer Weltlinie eines Körpers liegen. $c\sqrt{(-\Delta\tau^2)}$ ist der Eigenabstand der zwei Ereignisse.

3. $\Delta\tau$ ist Null. Das Ereignisintervall ist dann *lichtartig*. Die Ereignisse liegen auf der Weltlinie eines Lichtstrahls.

Aus Gleichung (2.1) sieht man, daß $\Delta\tau$ in der Raumzeit die Rolle der Bogenlänge Δs im Dreidimensionalen spielt. Wir nehmen nun an, daß in diesem $\mathbb{R}^3$ ein Punkt durch allgemeine Koordinaten x^1, x^2 und x^3 gegeben ist, und daß wir die ursprünglichen kartesischen Koordinaten durch:

$$\begin{aligned} x &= x(x^1, x^2, x^3) \\ y &= y(x^1, x^2, x^3) \\ z &= z(x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ausdrücken können. Es galt ursprünglich:

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \tag{2.4}$$

und aufgrund von (2.3) folgt ($\partial_i = \partial/\partial x^i$)

$$\begin{aligned} \Delta x &= \partial_1 x \Delta x^1 + \partial_2 x \Delta x^2 + \partial_3 x \Delta x^3 \\ \Delta y &= \partial_1 y \Delta x^1 + \partial_2 y \Delta x^2 + \partial_3 y \Delta x^3 \\ \Delta z &= \partial_1 z \Delta x^1 + \partial_2 z \Delta x^2 + \partial_3 z \Delta x^3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta s^2 &= \left[+(\partial_1 x)^2 + (\partial_1 y)^2 + (\partial_1 z)^2\right] (\Delta x^1)^2 + \\ &\quad 2\left[\partial_1 x \partial_2 x + \partial_1 y \partial_2 y + \partial_1 z \partial_2 z\right] \Delta x^1 \Delta x^2 + \cdots \\ &= g_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3) \Delta x^\mu \Delta x^\nu \end{aligned} \tag{2.6}$$

mit

$$g_{\mu\nu} = (\partial_\mu x \partial_\nu x + \partial_\mu y \partial_\nu y + \partial_\mu z \partial_\nu z)\,. \tag{2.7}$$

Ganz offensichtlich ist

$$\partial_\mu x \partial_\nu x = \partial_\nu x \partial_\mu x$$

und damit ist $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$; somit sind nur 6 der neun Elemente des *metrischen Tensors* g unabhängig. Das wesentliche aber ist, daß wir die physikalisch wichtige Größe Δs – den Abstand zwischen zwei Punkten – bestimmen können, wenn wir die Koordinatendifferenzen zwischen den Punkten berechnen können. Δs ist invariant, nicht aber die Koordinatendifferenzen – sie hängen von der Wahl des Koordinatensystemes ab. Es ist die Einführung dieses Abstandes zwischen zwei Punkten, welche dem Raum seine *Metrik* gibt.

Für rechtwinkelige Koordinaten ist $g_{\mu\nu}$ diagonal und die diagonalen Elemente sind alle gleich 1. Für (2.1) ergibt dann (2.6)

$$\Delta\tau^2 = g_{ij}\Delta x^i \Delta x^j$$

mit (für $c^2 = 1$)

$$g_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

dem metrischen Tensor des frei fallenden Systems.

Es gibt zwei wesentliche Unterschiede zwischen dem dreidimensionalen euklidischen Raum und der vierdimensionalen Raumzeit: in der Raumzeit finden wir Ereignispaare mit dem Intervall Null, eine Unmöglichkeit im Dreidimensionalen. (Da es immer möglich ist, ein beliebiges g_{ij} in Diagonalform darzustellen, wird der Unterschied in der Auswahl positiver und negativer Elemente als *Signatur* der Metrik eingeführt. Kann $\Delta\tau^2$ gleich Null sein, so ist die Metrik *indefinit*.)

Der zweite Unterschied besteht darin, daß sich das $g_{\mu\nu}$ eines euklidischen dreidimensionalen Raumes stets in eine Form $g_{\mu\nu}^0$ transformieren läßt, daß g_{ij} der Raumzeit aber im allgemeinen – wegen des Äquivalenzprinzips – nur *punktweise* zu einem g_{ij}^0 wird. Dies ist der mathematische Ausdruck dafür, daß es in einem Schwerefeld nicht möglich ist, die gesamte Raumzeit mit *einem* Inertialsystem zu überdecken. In der Gegenwart von Schwerkraft muß also g_{ij} eine wesentlich kompliziertere Raumzeit beschreiben als es die spezielle Relativitätstheorie tut.

2.2 Die geodätische Linie

Wir wollen hier die Frage beantworten, auf welcher Bahn $x^i(\tau)$ sich ein Körper bewegt, welcher keinen Gravitationskräften ausgesetzt ist. Im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie können wir die Frage wie folgt beantworten: der Körper bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Geraden, sodaß seine in einem Inertialsystem gemessene Weltlinie durch

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} = 0; \qquad \frac{\mathrm{d}^2 \mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau^2} = 0 \tag{2.9}$$

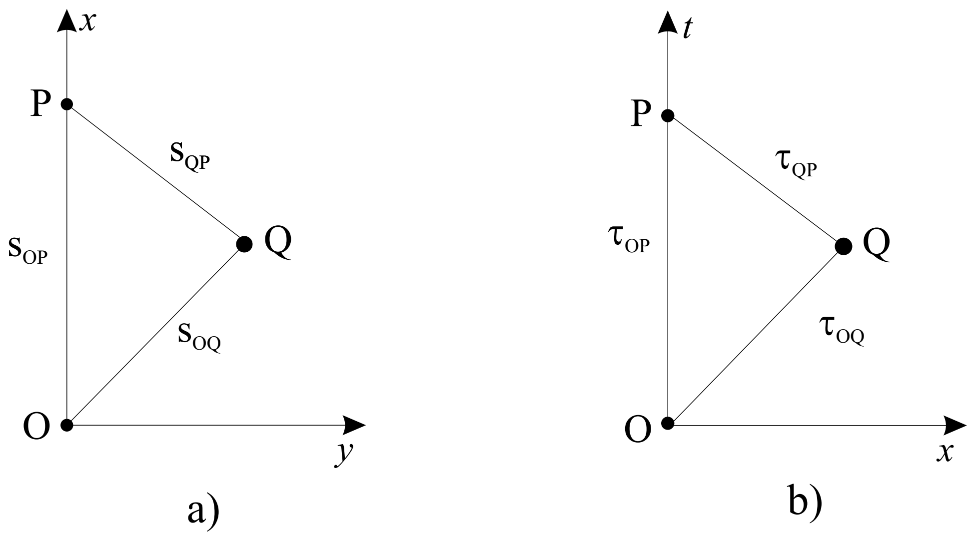

Abbildung 2.2: Zur Bestimmung des kürzesten Abstandes zwischen zwei Punkten $\overline{OP}$. a) Dreidimensionaler Raum, b) Raumzeit

gegeben ist. Dies ist einfach Newtons erstes Gesetz in parametrisierter Form. Ist das System jedoch kein Inertialsystem, so sind $\mathbf{r}$ und t miteinander gekoppelt und wir finden andere Gleichungen. In jedem Fall ist das Bezugssystem nur lokal ein Inertialsystem, wenn ein inhomogenes Schwerefeld existiert. Somit stellt (2.9) nicht die allgemeine kovariante Form dar, wie sie für ein physikalisches Gesetz zu fordern ist. Wir müssen also eine andere Formulierung für die Gerade finden.

Im dreidimensionalen euklidischen Raum entspricht zum Beispiel die Gerade der kürzesten Entfernung zwischen zwei Punkten. Dies kann wie folgt bewiesen werden (Abb. 2.2a):

$$\begin{array}{rcl} \text{Punkt } O & = & (0,0,0) \\ \text{Punkt } P & = & (x_P,0,0) \\ \text{Punkt } Q & = & (x_Q,y_Q,0) \end{array}$$

Es ist dann:

$$s_{OP}^2 = x_P^2 + y_P^2 + z_P^2 = x_P^2$$
$$s_{OP} = |x_P|.$$

Hingegen erhält man für den 'Umweg' über den Punkt Q:

$$s_{OQP} = s_{OQ} + s_{QP} = \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} + \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + y_Q^2}.$$

Wir können aber auch $x_P = x_Q + (x_P - x_Q)$ schreiben und damit wird offensichtlich, daß stets $s_{OQP} > s_{OP}$ gelten muß, solange $|y_Q| \neq 0$ gilt. Damit ist aber auch bewiesen, daß die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellt.

Wir gehen nun zur vierdimensionalen Raumzeit über (Abb. 2.2b) und untersuchen die folgenden Punkte:

$$\begin{aligned} \text{Punkt } O &= (0,0,0,0) \\ \text{Punkt } P &= (t_P,0,0,0) \\ \text{Punkt } Q &= (t_Q,x_Q,0,0) \end{aligned}$$

Es folgt dann aus (2.6) und (2.8):

$$\tau_{OP}^2 = t_P^2 - 0 - 0 - 0; \rightarrow \tau_{OP} = t_P^2.$$

Für den Umweg über Q gilt:

$$\tau_{OQP} = \tau_{OQ} + \tau_{PQ};$$

dies folgt einerseits aus der Additivität von Zeitablesungen und andererseits aus der Forderung, daß $\overline{OQ}$ und $\overline{QP}$ zeitartig sein müssen, damit $\overline{OQP}$ eine mögliche Weltlinie ist. Nun verwenden wir (2.1) und erhalten:

$$\tau_{OQ}^2 = t_Q^2 - x_Q^2/c^2$$

und

$$\tau_{QP}^2 = (t_P - t_Q)^2 - x_Q^2/c^2.$$

Nun gilt natürlich auch:

$$\tau_{OP} = t_Q + (t_P - t_Q)$$

und wir finden:

$$\tau_{OQP} = \sqrt{t_Q^2 - x_Q^2/c^2} + \sqrt{(t_P - t_Q)^2 - x_Q^2/c^2} < \tau_{OP}. \qquad (2.10)$$

Wir erhalten also: das zeitartige Intervall zwischen zwei Ereignissen ist am *längsten* entlang einer geraden, sie verbindenden Weltlinie.

Wir erhalten aber auch ein wichtiges Nebenergebnis: das Intervall zweier entfernter Ereignisse hängt von der Weltlinie zwischen ihnen ab. Anders ausgedrückt: zwei Uhren zeigen im allgemeinen nicht für jedes Ereignis dieselben Zeiten an, wenn sie entlang unterschiedlicher Weltlinien bewegt werden, auch wenn sie zu einem früheren Zeitpunkt synchronisiert wurden. (Man spricht in diesem Zusammenhang vom "Zwillingsparadoxon". Das Phänomen wurde inzwischen beobachtet und es ist eigentlich nicht paradoxer als die Tatsache, daß zwei Fäden, die dieselben Punkte verbinden, verschieden lang sein können.)

Für das Intervall τ_{AB} zwischen zwei Ereignissen A und B entlang einer sie verbindenden Weltlinie $x^i(\tau)$ erhält man nach (2.6):

$$\begin{aligned}
\tau_{AB} &= \int_A^B \sqrt{g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j} \\
&= \int_A^B \mathrm{d}\tau \sqrt{g_{ij}(x^k(\tau))\frac{\mathrm{d}x^i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^j(\tau)}{\mathrm{d}\tau}}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

Aufgrund unserer bisherigen Ergebnisse scheint es so zu sein, als ob eine gerade Linie entweder einem Minimum oder einem Maximum einer Größe entspricht, je nach der Metrik. (In unserem Fall also je nach der Formel, welche Δs^2, bzw. $\Delta\tau^2$ bestimmt.) Wir können beide Fälle erfassen, indem wir sagen, daß die Größen für Gerade *stationäre Werte* annehmen. Andere Wege zwischen denselben Ereignissen (oder Punkten), welche sich von den stationären nur infinitesimal unterscheiden, haben für den Abstand s bzw. τ denselben Wert wie für die Gerade. Wir nennen diese extremalen Linien die *geodätischen Linien.* Ist die Metrik g_{ij} indefinit, so gibt es geodätische Linien, entlang welcher das Intervall Null ist, es sind dies die *Null–Geodätischen.*

Wir können nun unsere Fragestellung vom Beginn dieses Abschnittes kovariant formulieren:

Ein Körper verfolgt eine zeitartige geodätische Linie in der Raumzeit.

Diese Aussage benötigt kein spezifisches Koordinatensystem mehr und kommt daher als physikalisches Gesetz in Frage. Bewiesen haben wir sie aber nur im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie, also nur lokal. Einstein forderte nun, daß dieses Gesetz *allgemein* gelten sollte. Wir formulieren also entsprechend:

Axiom 2.1 *Die Raumzeit ist eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit mit indefiniter Metrik g_{ij}, die das Ereignisintervall als*

$$\Delta\tau^2 = g_{ij}\Delta x^i\Delta x^j$$

bestimmt. Die Weltlinien materieller Körper, auf die nur die Schwerkraft wirkt, sind zeitartige geodätische Linien. Die Weltlinien von Lichtstrahlen sind Null–Geodätische.

Dieses Axiom löst bereits eines unserer Probleme: die träge und passive schwere Masse kommen in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr vor, und die lokale Konstanz von g_{ij} bedeutet, daß es immer möglich ist ein lokales Inertialsystem zu finden, in dem der metrische Tensor durch (2.8) gegeben ist. (Dies ist eine unmittelbare Folge des Äquivalenzprinzips.) Es bleibt noch anzumerken, daß das Geodätengesetz, welches hier unabhängig eingeführt wurde, auch aus anderen Postulaten abgeleitet werden kann.

Es bleibt jetzt noch eine Frage offen: wodurch wird die Metrik bestimmt?

2.3 Gekrümmte Räume

Wir haben zuletzt die geodätischen Linien im Zusammenhang mit der Besprechung gerader Weltlinien frei fallender Teilchen in der speziellen Relativitätstheorie eingeführt. Relativ zum frei fallenden Teilchen bewegt sich jedes andere mit konstanter Geschwindigkeit, solange keine echten – also inhomogenen – Gravitationsfelder berücksichtigt werden. Wie wir aber bereits auf Seite 12 diskutiert haben, verursachen Gravitationsfelder Relativbeschleunigungen zwischen den frei fallenden Teilchen – also sind ihre geodätischen Linien *relativ zueinander gekrümmt.* Nur in kleinen Bereichen und für kurze Zeiten sind die Geodätischen der Raumzeit und ihre Raumprojektionen, die Bahnen, nahezu gerade. Es also festzustellen, daß die Raumzeit selbst *gekrümmt* ist!

Wir erläutern den Begriff der Krümmung an zweidimensionalen Flächen, etwa einer Ebene, einer Kugelfläche, einer Zylinderfläche, ... Sind diese Flächen gekrümmt oder sind sie flach? Es war die große Leistung von Gauß zu zeigen, daß die Krümmung, ja sogar die ganze Geometrie, einer Fläche *intrinsisch* bestimmt werden kann, also durch Messungen, die in der Fläche selbst durchgeführt werden können. Es ist somit nicht notwendig die Fläche in einen höherdimensionalen Raum einzubetten, um deren Eigenschaften zeigen zu können.

Geometrien sind zunächst einmal mathematische Theorien. Um aber überprüfen zu können, welche Geometrie auf einer Fläche gilt, müssen wir die in der Theorie vorkommenden Größen physikalisch definieren. Wir definieren den Abstand entlang einer Linie als die Anzahl der Einheiten eines geeichten Maßstabes, welcher an die Linie angelegt ist. Wir definieren die geodätische Linie zwischen zwei Punkten dieser Fläche als die Linie, die ein Faden auf dieser Fläche beschreibt, wenn er zwischen diesen Punkten gespannt wird. Wenn sich dann bei Experimenten die Sätze der ebenen euklidischen Geometrie als falsch herausstellen, so ist die Fläche gekrümmt. – Sie ist nicht euklidisch. So addieren sich in einer Ebene die Winkel eines Dreiecks, dessen Seiten Geraden (Geodäten) sind, zu 180°. Auf der Oberfläche einer Kugel dagegen ist die Summe der Winkel eines geodätischen Dreiecks stets größer als 180°. (Siehe auch Abb. 2.3.) Es läßt sich also durch intrinsische Messun-

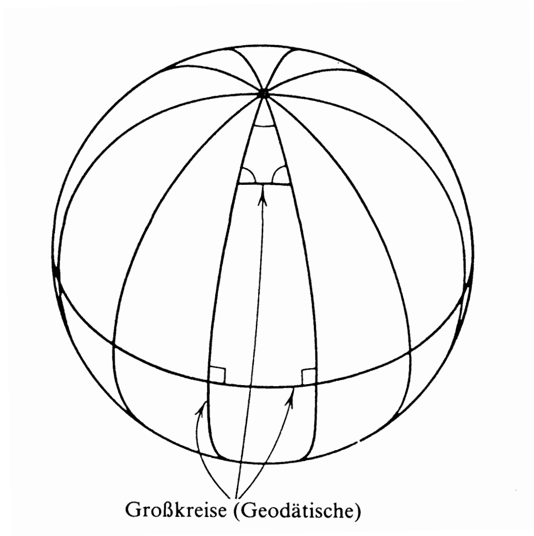

Abbildung 2.3: Zur Winkelsumme eines geodätischen Dreieckes auf einer Kugelfläche

gen zeigen, daß die Kugeloberfläche eine andere Krümmung aufweist als eine euklidische Fläche.

Wir wollen nun die Krümmung definieren und verwenden dazu einen Satz der ebenen Geometrie: der Umfang eines Kreises vom Radius a ist $2\pi a$. Um auf einer beliebigen Fläche einen Kreis mit dem Radius a um den Mittelpunkt O zeichnen zu können, zeichnen wir alle Geodäten, welche vom Mittelpunkt O ausgehen, und markieren jenen Punkt, dessen Abstand von O gleich a ist; entsprechend der Definition ist dann der Kreis der geometrische Punkt aller Orte, welcher von einem zentralen Punkt den gleichen Abstand aufweisen. In unserem Fall wird dann der Kreis die Verbindung aller auf der Fläche markierten Punkte sein. Für eine Kugel (Abb. 2.4) vom Radius R erhalten wir für den Umfang C des so konstruierten Kreises:

$$\begin{aligned} C = 2\pi x &= 2\pi R \sin\frac{a}{R} \\ &\approx 2\pi a\left(1 - \frac{a^2}{6R^2} + \cdots\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Wir wollen die Krümmung durch

$$K \stackrel{!}{=} \frac{1}{R^2} \tag{2.13}$$

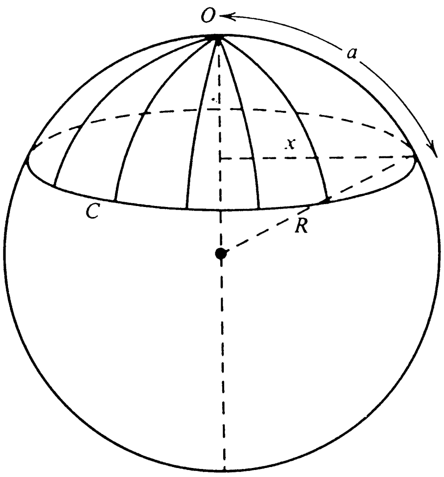

Abbildung 2.4: Zur Konstruktion eines Kreises vom Radius a auf einer beliebigen Fläche

definieren und orden (2.12) um

$$\begin{aligned} C - 2\pi a &= -\frac{\pi a^3}{3R^2} = -\frac{\pi a^3}{3} K \\ K &= \frac{3}{\pi} \frac{2\pi a - C}{a^3} \end{aligned}$$

und schreiben noch besser

$$K = \frac{3}{\pi} \lim_{a \to 0} \left(\frac{2\pi a - C}{a^3} \right). \tag{2.14}$$

Ist $C < 2\pi a$, dann ist die Krümmung *positiv*, ist hingegen $C > 2\pi a$, so ist die Krümmung negativ.

Wir können (2.14) als eine geometrische Beschreibung der Krümmung bezeichnen; die analytische Beschreibung verwendet den metrischen Tensor g_{ij} zur Beschreibung der Krümmung. Es war wiederum Gauß, welcher zeigen konnte, daß die Krümmung ausschließlich durch maximal zweite Ableitungen der $g_{ij}(x^i)$ beschrieben wird. Dabei ist die Krümmung eine *lokale* Eigenschaft, welche sich von Punkt zu Punkt verändern kann. Der Wert der Krümmung ist dabei an jedem Punkt unabhängig von den Koordinaten – wir haben somit eine weitere kovariante Größe gefunden.

In Räumen mit mehr als zwei Dimensionen ist es nicht mehr möglich die Krümmung durch eine Funktion K zu beschreiben. Es ist hiezu der *Riemannsche Krümmungstensor* R_{ijkl}, ein Tensor vierter Stufe, notwendig.

2.4 Krümmung und Gravitation

Einstein behauptet nun:

Axiom 2.2 *In der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Raumzeit in der Nähe schwerer Massen gekrümmt.* $\Longrightarrow$ *Die Metrik der Raumzeit wird durch die Masseverteilung im Raum bestimmt und die Weltlinien von Planeten und anderen Körpern sind in dieser gekrümmten Raumzeit geodätische Linien. Die Beziehung zwischen der schweren Masse und der Raumkrümmung wird durch die* Einsteinschen Feldgleichungen *bestimmt.*

Die so formulierte Theorie steht dabei nicht im Widerspruch zur speziellen Relativitätstheorie. Ihre Raumzeit ist flach, da die Komponenten von g_{ij} Konstanten sind. Die Raumzeit ist im inhomogenen Schwerefeld gekrümmt und ist daher durch ein ebenes Bezugssystem nicht überdeckbar. Es existieren aber lokale Inertialsysteme und die Raumzeit ist im kleinen Maßstab auch flach $\Longrightarrow$ alle Flächen sind lokal ebene Systeme ($C \to 2\pi a$ für $a \to 0$). Im lokalen Bereich gibt es somit keinen Widerspruch, und die beiden Theorien schließen einander nicht aus.