2. Übungsblatt zu Computersimulationen
SS 2006

Zufallszahlen

1. Direkte Methode:
   Schreiben Sie eine Funktion, die Zufallszahlen gemäß der Wahrscheinlichkeitsdichte
   $$p(x) = \lambda \exp(-\lambda\, x) \qquad \text{für } x \in [0, \infty), \quad \lambda > 0$$
   erzeugt.
   Die Verteilungsfunktion dazu lautet
   $$y = F(x) = \int_0^x p(x')\, dx' = 1 - \exp(-\lambda\, x).$$

2. Rejection Methode:
   Es soll eine Normalverteilung mit Mittelwert 0 gesampelt werden. Als Einhüllende diene die oben angegebene Exponentialverteilung, wodurch man auf den positiven Anteil der Normalverteilung beschränkt ist. Es muss also eine Konstante c derart bestimmt werden, dass
   $$\rho(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad \leq \quad c\lambda \exp(-\lambda\, x) = ch(x), \qquad \forall x \in [0, \infty).$$
   (Beachten Sie bitte: die Normierung der Normalverteilung ist so abgeändert, dass sie auf der positiven Halbachse normiert ist.) Insgesamt soll die kleinste Konstante c verwendet werden, die obige Bedingung noch erfüllt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass
   $$c_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2e}{\pi}} \quad \text{und} \quad h_{\text{opt}}(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{x}{\sigma}\right).$$
   (**Nachrechnen!**)

   Damit kann man nun den positiven Teil der Normalverteilung erzeugen. Dazu schlägt man eine $h(x)$-verteilte Zufallszahl x^T vor und akzeptiert sie mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\rho(x^T)}{c_{\text{opt}} \cdot h_{\text{opt}}(x^T)}$. Die vollständige Normalverteilung erhält man, indem man ein Vorzeichen für jede erzeugte Zufallszahl würfelt.

   Verwenden Sie auch für $h(x)$ gleichverteilte Zufallszahlen und bestimmen Sie dazu die Konstante c um die Einhüllende zu finden. Sampeln Sie so $\rho(x)$ und vergleichen Sie die Akzeptanzwahrscheinlichkeit für beide Methoden. Untersuchen Sie den Einfluss unterschiedlicher Werte für σ!

3. Histogramm:
   Überprüfen Sie beide Funktionen mit Hilfe von Histogrammen und achten Sie dabei auf die Normierung!