3. Übungsblatt zu Computersimulationen
SS 2006

Random Walk

1. Wiener-Lévy-Prozess:
   Schreiben Sie ein Programm, das N_w *random walkers* $w_i(t)$, $i = 1, \ldots, N_w$, auf den Weg schickt. Alle sollen bei $w_i(0) = 0$, $i = 1, \ldots, N_w$, starten.

   - Ziehen Sie Zahlen r_i aus $\{-\Delta x, 0, \Delta x\}$ mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$.
   - $w_i(t+1) = w_i(t) + r_i$, $i = 1 \ldots N_w$.

   Wiederholen Sie das insgesamt N_t-mal. Berechnen und zeichnen Sie

   $$\left\langle [w(t)]^2 \right\rangle := \frac{1}{N_w} \sum_{i=1}^{N_w} [w_i(t)]^2 \qquad \forall t = 1, \ldots, N_t$$

   über t. Die Theorie besagt, dass $\langle [w(t)]^2 \rangle = t \, \langle r^2 \rangle$. Das kann man leicht berechnen:

   $$\begin{aligned} \left\langle r^2 \right\rangle &= \sum_{i=1}^{3} r_i^2 p_i \\ &= \frac{(-\Delta x)^2}{3} + \frac{(0)^2}{3} + \frac{(\Delta x)^2}{3} \\ &= \frac{2\,(\Delta x)^2}{3}. \end{aligned}$$

   Somit sollte $\langle [w(t)]^2 \rangle = t \, \frac{2\,(\Delta x)^2}{3}$ gelten. Zeigen Sie dies!

2. Markovkette à la Metropolis:
   Erzeugen Sie eine Zufallsfolge $x(t)$, welche nach einer Normalverteilung der Varianz $\sigma^2 = 1$ verteilt ist.

   - Nach dem t-ten Schritt sei $x(t) = x_\alpha$. Ziehen Sie ein x_β aus einer Nachbarschaft von x_α, etwa nach der Vorschrift

     $$x_\beta = x_\alpha + (r - 0.5)\Delta x,$$

     wobei r eine gleichverteilte Zufallszahl $\in [0, 1]$ ist, und Δx die Größe der Umgebung angibt, in der x_β gesucht wird.

- Ist $\min[1, p(x_\beta)/p(x_\alpha)]$ gleich 1, so ist $x(t+1) = x_\beta$. Ist dies nicht erfüllt, so ziehen Sie eine weitere Zufallszahl r gleichverteilt $\in [0,1]$; ist $r < p(x_\beta)/p(x_\alpha)$, dann ist $x(t+1) = x_\beta$, andernfalls ist $x(t+1) = x_\alpha$.

Der Parameter Δx ist so zu adjustieren, dass rund die Hälfte der vorgeschlagenen x_β-Werte akzeptiert werden.
Untersuchen Sie mittels eines Histogramms, ob die so erzeugten Zahlen $x(t)$ tatsächlich nach normalverteilt sind. Überprüfen Sie die so erzeugte Zufallfolge auf Korrelationen.