Kapitel 5

Das elektromagnetische Feld

In Anhang C haben wir bereits gesehen, daß das transversale Strahlungsfeld den unabhängigen dynamischen Freiheitsgraden des elektromagnetischen Feldes entspricht, und wir haben nur dieses Feld quantisiert. Die instantane Coulombwechselwirkung wird auch nur als klassisches Potential behandelt und in dieser Formulierung ist die Quantenelektrodynamik (QED) sehr stark mit der klassischen Theorie korreliert. Da aber die Zerlegung in longitudinale und transversale Komponenten vom Bezugssystem abhängig ist, wurde der grundsätzlichen Lorentzkovarianz der Theorie nicht Rechnung getragen. Will man also die QED voll entwickeln, so benötigt man eine lorentzkovariante Formulierung der Elektrodynamik, wie sie in der Vorlesung "Elektrodynamik" entwickelt wurde.

5.1 Die klassischen Felder

Wir entwickeln die kovariante Theorie, indem wir das skalare Potential $\phi(x^\mu)$ und die drei Komponenten des Vektorpotentiales $\mathbf{A}(x^\mu)$ zum Viererpotential

$$A^\mu(x^\mu) = (\phi(x^\mu), \mathbf{A}(x^\mu)) \tag{5.1}$$

zusammenfassen, und die Raumladungsdichte $\rho(x^\mu)$ mit der Stromdichte $\mathbf{j}(x^\mu)$ zur Viererstromdichte

$$s^\mu(x^\mu) = (\rho(x^\mu), \mathbf{j}(x^\mu)) \tag{5.2}$$

vereinigen. Des weiteren hat die Untersuchung ergeben, daß die **E**- und **B**-Felder nicht zu einem Vierervektor zusammengefaßt werden können. Die Komponenten dieser Felder werden im schiefsymmetrischen Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ mit den Komponenten

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -F_{\nu\mu} \tag{5.3}$$

zusammengefaßt, welcher die folgende Form hat:

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Wir finden weiter:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\rho\sigma}, \tag{5.5}$$

oder in Matrixdarstellung:

$$(F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_2 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Damit ergeben sich die inhomogenen Maxwellgleichungen aus der Divergenz des Feldstärketensors:

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = -s^\nu \tag{5.7}$$

mit der Kontinuitätsgleichung

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu s^\nu = 0. \tag{5.8}$$

Die Lorentzeichung findet man in ihrer kovarianten Form als:

$$\partial_\mu A^\mu = 0. \tag{5.9}$$

Schließlich können die homogenen Maxwellgleichungen in ihrer kovarianten Form als

$$\partial^\lambda F_{\mu\nu} + \partial^\mu F_{\nu\lambda} + \partial^\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{5.10}$$

geschrieben werden, was man noch durch Einführen des Tensors

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \tag{5.11}$$

auf

$$\partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} = 0 \tag{5.12}$$

vereinfachen kann. Hier ist $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ der Levi-Civitásche antisymmetrische Tensor:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ sind eine gerade Permutation von } 0,\ldots,3 \\ -1 & \mu, \nu, \rho, \sigma \text{ sind eine ungerade Permutation von } 0,\ldots,3. \end{cases}$$

Eine wichtige Invariante des elektromagnetischen Feldes ergibt sich mit

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right), \tag{5.13}$$

welche dem Energieinhalt des elektromagentischen Feldes ähnlich ist.

Will man nun einen Lagrangeformalismus des elektromagnetischen Feldes entwickeln, so muß man zunächst eine Lagrangedichte einführen, deren Wirkungsintegral zu minimieren ist. Hat man die korrekte Lagrangedichte des elektromagnetischen Feldes gefunden, so müssen sich dann die Maxwellgleichungen als die Feldgleichungen eines Variantionsprinzips ergeben. Gleichung (5.13) ist ein natürlicher Kandidat für einen Ansatz zum Auffinden der Lagrangedichte. Wir schreiben also:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{5.14}$$

Unter Benützung von (5.3) finden wir:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}F^{\rho\sigma}F^{\mu\nu} \\
&= -\frac{1}{4}g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma}\left(\partial^\sigma A^\rho - \partial^\rho A^\sigma\right)\left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right),
\end{aligned}$$

und wir erkennen, daß die Komponenten A^μ des Viererpotentiales die Rolle der ϕ_r aus Kapitel 2 spielen. Wir formen weiter um:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= -\frac{1}{4}\left(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu\right)\left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu - \underbrace{\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu}_{=\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu} + \underbrace{\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu}_{=\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu\right) + \frac{1}{2}\left(\partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu\right) \\
&= \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Wir erkennen daraus, daß

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\partial_\nu A^\mu\right)$$

gilt, und daß daher $\mathcal{L}$ nicht explizite von A^μ abhängt. Daher werden die Terme

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = 0$$

sein, und wir müssen nur den Beitrag des zweiten Termes der Euler-Lagrange Gleichungen (2.6) bestimmen. Wir beginnen mit

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial(\partial_0 A^0)} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A^0)}\left(\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A^0)}\left(\partial_\nu A_0 \partial^\nu A^0 + \partial_\nu A_i \partial^\nu A^i\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A^0)}\left(\partial_0 A_0 \partial^0 A^0 + \partial_i A_0 \partial^i A^0 + \partial_\nu A_i \partial^\nu A^i\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A^0)}\underbrace{\partial_0 A_0}_{=\partial_0 A^0}\right)\left(\partial^0 A^0\right) - \frac{1}{2}\partial_0 A_0 \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A^0)}\left(\underbrace{\partial^0 A^0}_{=\partial_0 A^0}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\partial^0 A^0 - \frac{1}{2}\partial_0 A_0 = -\frac{1}{2}\left(\partial^0 A^0 + \partial^0 A^0\right) \\
&= -\partial^0 A^0 .
\end{aligned}
$$

Weiters finden wir:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial(\partial_1 A^0)} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_1 A^0)}\left(\partial_1 A_0 \partial^1 A^0\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_1 A^0)}\left[\partial_1 A^0\left(-\partial_1 A^0\right)\right] \\
&= \partial_1 A^0 = -\partial^1 A^0 .
\end{aligned}
$$

Zusammengefaßt findet man daher:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial(\partial_\mu A^0)} = -\partial^\mu A^0,
$$

und damit wird

$$
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial(\partial_\mu A^0)} = -\partial_\mu \partial^\mu A^0 .
$$

Man führt diese Berechnung nun für alle verbleibenden Komponenten A^i durch und erhält schließlich

$$
\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu,
$$

als ersten Beitrag. Eine völlig analoge Rechnung ergibt für den zweiten Term:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial(\partial_\mu A^\nu)} = \partial_\mu \partial^\nu A^\mu .
$$

Dies resultiert in der Feldgleichung

$$\partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = \partial_\mu F^{\nu\mu} = 0. \tag{5.15}$$

Nun gilt aber die Feldgleichung (5.7) und wir erkennen, daß (5.15) der Feldgleichung (5.7) entspricht, wenn keine Quellen vorliegen, also $s^\mu = 0$. Wir haben die Vakuumgleichungen der Elektrodynamik aufgefunden. Man muß also der Lagrangedichte (5.14) einen Term hinzufügen, welcher auch den Beitrag der Quellen berücksichtigt. Da aber bereits der zweite Beitrag zu den Euler-Lagrange Gleichungen ausgeschöpft ist - er beschreibt ja korrekt das Vakuumverhalten - kann der Korrekturterm nur aus dem ersten Term der Euler-Lagrangegleichungen folgen. Der notwendige Zusatzterm muß daher proportional (s^μ) und proportional (A^μ) sein.

Wir *postulieren* daher für das elektromagnetische Feld die Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x^\mu) F^{\mu\nu}(x^\mu) - s_\mu(x^\mu) A^\mu(x^\mu), \tag{5.16}$$

und dieses Postulat führt zusammen mit der Lorentzeichung wieder zu den Maxwellschen Gleichungen in ihrer kovarianten Form.

Wir bestimmen nun die adjungierten Impulse

$$\pi^\mu(x^\mu) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{\mu 0}(x^\mu),$$

was aus den zuvor erarbeiteten Ergebnissen unmittelbar folgt. Dies ergibt weiter:

$$\begin{aligned} \pi^i(x^\mu) &= -F^{i0}(x^\mu) \\ \pi^0(x^\mu) &= -F^{00}(x^\mu) \equiv 0. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis würde dann dazu führen, daß bei einer etwaigen Quantisierung in den Vertauschungsrelationen eine Unsymmetrie entsteht, welche eine Vertauschbarkeit der adjungierten Orts- und Impulskoordinaten in der Nullkomponente zuließe.

Von Fermi wurde daher eine Lagrangedichte vorgeschlagen, welche quantisierbar ist:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[\partial_\nu A_\mu(x^\mu)\right] \left[\partial^\nu A^\mu(x^\mu)\right] - s_\mu(x^\mu) A^\mu(x^\mu). \tag{5.17}$$

Ein Vergleich mit der Lagrangedichte der Klein-Gordon Gleichung (3.1) zeigt unmittelbar, daß (5.17) zu den Feldgleichungen

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x^\mu) = -s^\nu(x^\mu) \tag{5.18}$$

führt. Vergleichen wir dies mit (5.7), so finden wir, daß (5.18) nur dann den Maxwellgleichungen entspricht, wenn das Vektorpotential der Lorentzeichung unterworfen wird. Es ist noch festzustellen, daß das *freie Feld* ($s^\mu = 0$) durch die Feldgleichung

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu(x^\mu) = 0 \tag{5.19}$$

beschrieben ist. Dies entspricht einer Klein-Gordon Gleichung für Teilchen der Masse Null.

Die adjungierten Impulse erhalten wir mit

$$\begin{aligned}
\pi^\mu(x^\mu) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)}\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^0}\frac{\partial A^\nu}{\partial x_0} + \sum_i \cdots + \cdots\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^0}\right)\frac{\partial A^\nu}{\partial x_0} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x^0}\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)}\frac{\partial A^\nu}{\partial x^0}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^0}\left(\frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)}\frac{g^{\nu\rho}\partial A_\rho}{g^{0\sigma}\partial x_\sigma}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\frac{\partial A_\nu}{\partial x^0} g^{\nu\mu} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^0} \\
&= -\frac{\partial A^\mu}{\partial x_0}.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Damit sind alle π^μ von Null verschieden und eine Quantisierung ist nunmehr möglich.

5.2 Quantisierung des freien elektromagnetischen Feldes

5.2.1 Vorarbeiten

Die Gleichung (5.19) erlaubt es das freie elektromagnetische Feld $A^\mu(x^\mu)$ nach einem vollständigen Satz von Lösungen der Wellengleichung zu entwickeln, was ganz analog zu (2.5), (3.5) und (3.6) erfolgt:

$$A^\mu(x^\mu) = A^{(+)\mu}(x^\mu) + A^{(-)\mu}(x^\mu) \tag{5.21}$$

mit

$$A^{(+)\mu}(x^\mu) = \sum_{r,\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\Omega\omega_\mathbf{k}}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\, a_r(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}, \tag{5.22}$$

und

$$A^{(-)\mu}(x^\mu) = \sum_{r,\mathbf{k}} \left(\frac{1}{2\Omega\omega_\mathbf{k}}\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\, a_r^\dagger(\mathbf{k}) e^{ik_\mu x^\mu}. \tag{5.23}$$

Die Summation geht dabei über alle Wellenvektoren $\mathbf{k}$, welche aufgrund der periodischen Randbedingungen zulässig sind; weiters gilt:

$$k^0 = \omega_\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\,. \tag{5.24}$$

Der Index r ist der *Polarisationsindex* und läuft von 0 bis 3. Er spiegelt die Tatsache wieder, daß für ein Vierervektorfeld $A^\mu(x^\mu)$ für *jedes* $\mathbf{k}$ vier linear unabhängige Polarisationszustände bestehen. Diese werden durch die *Polarisationsvektoren* $\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})$ charakterisiert; wir wählen sie reell und damit gehorchen sie den folgenden Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen:

$$\varepsilon_{r\mu}(\mathbf{k})\varepsilon_s^\mu(\mathbf{k}) = -\zeta_r\delta_{r,s} \tag{5.25}$$

$$\sum_r \zeta_r\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) = -g^{\mu\nu} \tag{5.26}$$

$$\zeta_0 = -1; \qquad \zeta_i = 1, \quad i = 1,2,3. \tag{5.27}$$

Natürlich sind die klassischen Potentiale $A^\mu(x^\mu)$ reelle Größen und es war daher unnotwendig in Gleichung (5.23) den Entwicklungskoeffizienten $a_r^\dagger(\mathbf{k})$ einzuführen, dies wurde nur in Hinblick auf die bevorstehende Quantisierung gemacht.

Die Gleichungen (5.21 - 5.23) sind mit den Gleichungen (C.24) zu vergleichen, welche wir bei der Entwicklung des Strahlungsfeldes gefunden haben. Dieses Strahlungsfeld zerfiel in zwei Polarisationszustände für jedes $\mathbf{k}$ und zusätzlich hatten wir noch die instantane Coulombwechselwirkung zwischen den Ladungen. Wir werden noch sehen, daß die zwei zusätzlichen Polarisationszustände, welche wir nun gefunden haben, eine kovariante Beschreibung des Coulombpotentiales ermöglichen werden.

Die Interpretation unserer neuen Ergebnisse wird vereinfacht, wenn wir auf ein spezielles Referenzsystem übergehen:

$$\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k}) = n^\mu = (1,0,0,0) \tag{5.28a}$$

$$\varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})), \quad r = 1,2,3, \tag{5.28b}$$

wobei $\boldsymbol{\varepsilon}_1(\mathbf{k})$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_2(\mathbf{k})$ aufeinander und zusätzlich auf $\mathbf{k}$ senkrecht stehen. Schließlich wählen wir

$$\varepsilon_3(\mathbf{k}) = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}, \tag{5.28c}$$

also als Einheitsvektor in Richtung von $\mathbf{k}$. Somit folgt:

$$\mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) = 0, \quad r = 1,2 \tag{5.28d}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k})\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{k}) = \delta_{r,s}, \quad r,s = 1,2,3. \tag{5.28e}$$

$\varepsilon_1^\mu(\mathbf{k})$ und $\varepsilon_2^\mu(\mathbf{k})$ entsprechen dann der transversalen und $\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k})$ der longitudinalen Polarisation; $\varepsilon_0^\mu(\mathbf{k})$ entspricht dann einer skalaren oder *zeitlichen* Polarisation.

Da $(k_\nu n^\nu)n^\mu = k_0 n^\mu$ ist, und somit von k_ν k_0 ausgeblendet wird, kann man $\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k})$ auch als

$$\varepsilon_3^\mu(\mathbf{k}) = \frac{k^\mu - (k_\nu n^\nu)n^\mu}{\sqrt{(k_\nu n^\nu)^2 - k_\nu k^\nu}} \tag{5.28f}$$

schreiben, um eine kovariante Form beibehalten zu können. Insbesonders gilt ja:

$$\sqrt{(k_\nu n^\nu)^2 - k_\nu k^\nu} = \sqrt{(k^0)^2 - \left[(k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2\right]} = |\mathbf{k}|\,.$$

5.2.2 Kovariante Quantisierung

Wir quantisieren nun das freie elektromagnetische Feld ($s^\mu = 0$), wobei wir die Lagrangedichte (5.17) verwenden und zunächst die Lorentzeichung ignorieren. Aus den allgemeinen Vertauschungsrelationen (2.14) folgt für das Vektorpotential:

$$\left[\hat{A}^\mu(\mathbf{r},t), \hat{A}^\nu(\mathbf{r}',t)\right] = [\hat{\pi}^\mu(\mathbf{r},t), \hat{\pi}^\nu(\mathbf{r}',t)] = 0 \tag{5.29a}$$

$$\left[\hat{A}^\mu(\mathbf{r},t), \hat{\pi}^\nu(\mathbf{r}',t)\right] = -ig^{\mu\nu}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{5.29b}$$

Diese Gleichungen sind, sieht man vom Faktor $(-g^{\mu\nu})$ ab, ident zu den Gleichungen (3.4) für das Klein-Gordon Feld. Damit können wir auch alle weiteren Ergebnisse des Kapitels 3 übernehmen.

So haben wir bereits die kovarianten Vertauschungsrelationen für das Klein-Gordon Feld bestimmt. Wir definieren analog:

$$D^{\mu\nu}(x^\mu) = \lim_{m_0\to 0}\left[-g^{\mu\nu}\Delta(x^\mu)\right], \tag{5.30}$$

und finden unmittelbar

$$\left[\hat{A}^\mu(x^\mu), \hat{A}^\nu(x'^\mu)\right] = iD^{\mu\nu}(x^\mu - x'^\mu), \tag{5.31}$$

wobei $\Delta(x^\mu)$ entsprechend (3.43) definiert ist. Genauso erhalten wir den Feynman Propagator

$$\left\langle 0 \left| \mathcal{T}\left\{\hat{A}^\mu(x^\mu)\hat{A}^\nu(x'^\mu)\right\} \right| 0 \right\rangle = iD_F^{\mu\nu}(x^\mu - x'^\mu), \tag{5.32}$$

mit

$$D_F^{\mu\nu}(x^\mu) = \lim_{m_0\to 0}[-g^{\mu\nu}\Delta_F(x^\mu)] = -\frac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k_\mu k^\mu + i\varepsilon}, \tag{5.33}$$

wie man aus (3.54) und (3.57) unmittelbar ersehen kann.

Man drückt nun, wie im Fall des freien Klein-Gordon Feldes, die Operatoren $\hat{a}_r(\mathbf{k})$ und $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$, aus welchen die Operatoren $\hat{A}^\mu(x^\mu)$ entsprechend (5.21) und (5.23) zusammengesetzt sind, durch die Operatoren $\hat{A}^\mu(x^\mu)$ und $\hat{\pi}(x^\mu)$ aus und findet dann die Vertauschungsrelationen für die Operatoren $\hat{a}_r(\mathbf{k})$ und $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$:

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_r(\mathbf{k}), \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= \zeta_r\delta_{r,s}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \\ \left[\hat{a}_r(\mathbf{k}), \hat{a}_s(\mathbf{k}')\right] &= \left[\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k}), \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{k}')\right] = 0. \end{aligned} \tag{5.34}$$

Es ist nun $\zeta_r = 1$ für $r = 1, 2, 3$ und damit entsprechen die Gleichungen (5.34) für diesen Fall den üblichen Bose-Vertauschungsrelationen. Für $r = 0$ ist aber $\zeta_0 = -1$ und man gewinnt zunächst den Eindruck, daß sich in diesem Fall die Rollen der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren vertauschen müßte. Dies führt aber zu zusätzlichen Problemen, welche es zu vermeiden gilt.

Wir folgen nun in der weiteren Argumentation dem von Gupta und Bleuler eingeschlagenen Weg. Es werden alle Operatoren $\hat{a}_r(\mathbf{k})$ als Vernichtungs- und alle $\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})$ als Erzeugungsoperatoren aufgefaßt. Der Vakuumzustand ist dann durch

$$\hat{a}_r(\mathbf{k})\,|0\rangle = 0, \qquad r = 0,1,2,3, \quad \forall\,\mathbf{k}, \tag{5.35a}$$

oder

$$\hat{A}^\mu(x^\mu)\,|0\rangle = 0, \qquad \mu = 0,1,2,3, \quad \forall\, x^\mu \tag{5.35b}$$

gegeben. Ein Einphotonenzustand ist dann durch

$$|1_{\mathbf{k},r}\rangle = \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle$$

beschrieben. Eine solche Interpretation der Operatoren muß natürlich gerechtfertigt werden. Wir betrachten dazu in Analogie zu (2.46):

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3r\,\mathcal{N}\left[\pi^\mu(x^\mu)\partial^0\hat{A}_\mu(x^\mu) - \mathcal{L}(x^\mu)\right] \\ &= \int d^3r\,\mathcal{N}\Big\{-\partial_0\hat{A}^\mu(x^\mu)\partial^0\hat{A}_\mu(x^\mu) + \frac{1}{2}\left[\partial_\nu\hat{A}_\mu(x^\mu)\right]\left[\partial^\nu\hat{A}^\mu(x^\mu)\right] \\ &\qquad + s_\mu(x^\mu)\hat{A}^\mu(x^\mu)\Big\} \\ &\overset{(5.21-5.23)}{=} \sum_{r,\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}}\zeta_r\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}_r(\mathbf{k}). \end{aligned} \tag{5.36}$$

Dieses Ergebnis ist erst nach sehr umfangreicher Rechnung zu erhalten. Diese erfolgt aber in völliger Analogie zur Rechnung, welche bereits für das Klein-Gordon Feld ausgeführt wurde. Man findet weiters, daß die Energie eines Einphotononenzustandes für alle r positiv definit ist:

$$\begin{aligned}
\hat{H}\,|1_{r,\mathbf{k}}\rangle &= \sum_{s,\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}\zeta_s \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{q})\hat{a}_s(\mathbf{q})\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle \\
&\overset{(5.34)}{=} \sum_{s,\mathbf{q}} \omega_{\mathbf{q}}\zeta_s \hat{a}_s^\dagger(\mathbf{q})\left[\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}_s(\mathbf{q}) + \zeta_s\delta_{r,s}\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}}\right]|0\rangle \\
&= \omega_{\mathbf{k}}\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle = \omega_{\mathbf{k}}\,|1_{r,\mathbf{k}}\rangle\,.
\end{aligned} \tag{5.37}$$

Wir führen noch den Teilchenzahloperator

$$\hat{n}_r(\mathbf{k}) = \zeta_r\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}_r(\mathbf{k}) \tag{5.38}$$

ein. Damit haben wir eine konsistente Besetzungszahldarstellung für *alle* Photonen aufgefunden.

Bei der Berechnung der Norm eines Photonenzustandes tritt aber trotzdem noch eine Schwierigkeit auf:

$$\begin{aligned}
\langle 1_{r,\mathbf{k}}\,|\,1_{r,\mathbf{k}}\rangle &= \left\langle 0\,\middle|\,\hat{a}_r(\mathbf{k})\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\,\middle|\,0\right\rangle \\
&= \left\langle 0\,\middle|\,\left[\hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k})\hat{a}_r(\mathbf{k}) + \zeta_r\right]\middle|\,0\right\rangle = \zeta_r\langle 0\,|\,0\rangle.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Mit dem Ergebnis, daß Zustände mit skalaren Photonen negative Norm haben, was in striktem Widerspruch zur üblichen Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Quantenmechanik ist. (Bisher wurden aber weder skalare noch longitudinale Photonen entdeckt, was aber keine Ausrede sein soll!) Es ist aber auch festzustellen, daß wir bisher die Lorentzeichung nicht berücksichtigt haben und damit entspricht die bisher entwickelte Theorie nicht der Maxwellschen Elektrodynamik.

Würden wir (5.9) als Operatoridentität

$$\partial_\mu\hat{A}^\mu(x^\mu) = \hat{0} \tag{5.40}$$

interpretieren, so müßte nach (5.31)

$$\left[\partial_\mu\hat{A}^\mu(x^\mu), \hat{A}^\nu(x'^\mu)\right] = i\partial_\mu D^{\mu\nu}(x^\mu - x'^\mu)$$

folgen, was entsprechend (5.33) sicherlich nicht gleich Null ist.

Das Problem wurde von Gupta und Bleuler gelöst indem sie die Bedingung (5.40) durch die schächere Bedingung

$$\partial_\mu\hat{A}^{(+)\mu}(x^\mu)\,|\psi\rangle = 0 \tag{5.41}$$

ersetzt haben. Diese Bedingung betrifft nur Vernichtungsoperatoren und trifft eine Auswahl zulässiger Zustände. Wir bilden noch die zu (5.41) adjungierte Gleichung

$$\langle\psi|\,\partial_\mu \hat{A}^{(-)\mu}(x^\mu) = 0, \tag{5.42}$$

und berechnen den Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi \left| \partial_\mu \hat{A}^\mu(x^\mu) \right| \psi \right\rangle &= \left\langle \psi \left| \partial_\mu \hat{A}^{(+)\mu}(x^\mu) + \partial_\mu \hat{A}^{(-)\mu}(x^\mu) \right| \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \psi \left| \partial_\mu \hat{A}^{(+)\mu}(x^\mu) \right| \psi \right\rangle + \left\langle \psi \left| \partial_\mu \hat{A}^{(-)\mu}(x^\mu) \right| \psi \right\rangle \\
&= 0. \qquad (5.43)
\end{aligned}$$

Durch die Bedingung (5.41) wurde somit erreicht, daß die Erwartungswerte für einen beliebigen Photonenzustand die Lorentzeichung einhalten. Damit sind die Maxwellschen Gleichungen im klassischen Limit erfüllt.

Wir wollen nun die Bedingung (5.41) genauer untersuchen. Dazu setzen wir (5.22) ein und verwenden (5.28):

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \hat{A}^{(+)\mu}(x^\mu)\,|\psi\rangle &= \sum_{r,\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) \partial_\mu e^{-ik_\mu x^\mu}\,|\psi\rangle \\
&= \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \varepsilon_0^\mu(\mathbf{k}) \hat{a}_0(\mathbf{k}) \partial_\mu e^{-ik_\mu x^\mu}\,|\psi\rangle \\
&\quad + \sum_{r=1,\mathbf{k}}^{3} N_{\mathbf{k}} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) \partial_\mu e^{-ik_\mu x^\mu}\,|\psi\rangle \\
&= A + B.
\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \exp\{-ik_\mu x^\mu\} &= \partial_\mu \exp\left\{-ik_0 x^0 + ik_j x^j\right\} \\
\partial_0 \exp\left\{-ik_0 x^0 + ik_j x^j\right\} &= -ik_0 e^{-ik_\mu x^\mu} \\
\partial_j \exp\left\{-ik_0 x^0 + ik_l x^l\right\} &= -ik_j e^{-ik_\mu x^\mu},
\end{aligned}$$

und damit folgt weiter:

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \varepsilon_0^\mu(\mathbf{k}) \hat{a}_0(\mathbf{k}) (-ik_\mu) e^{-ik_\mu x^\mu}\,|\psi\rangle \\
&\overset{(5.28a)}{=} -i \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} k_0 \hat{a}_0(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}\,|\psi\rangle \\
&\overset{(5.24)}{=} -i \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \,|\mathbf{k}|\, \hat{a}_0(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}\,|\psi\rangle
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{r=1,\mathbf{k}}^{3} N_{\mathbf{k}} \varepsilon_r^{\mu}(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) \partial_\mu e^{-ik_\mu x^\mu} \left|\psi\right\rangle \\
&\overset{(5.28a)}{=} \sum_{r=1,\mathbf{k}}^{3} N_{\mathbf{k}} \varepsilon_r^{j}(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) \partial_j e^{-ik_\mu x^\mu} \left|\psi\right\rangle \qquad \left[\varepsilon_r^0(\mathbf{k}) = 0, \quad r = 1,2,3\right] \\
&= i \sum_{r,\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \varepsilon_r^{j}(\mathbf{k}) k_j \hat{a}_r(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} \left|\psi\right\rangle \\
&= \left[\begin{array}{lcl} \varepsilon_r^j(\mathbf{k}) k_j &=& \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{k}) = 0, \text{ für } r = 1,2 \\ &=& \mathbf{k}\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{\mathbf{k}^2}{|\mathbf{k}|} = |\mathbf{k}|\,, \text{ für } r = 3 \end{array} \right] \\
&= i \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \left|\mathbf{k}\right| \hat{a}_3(\mathbf{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} \left|\psi\right\rangle .
\end{aligned}
$$

Also:

$$
\partial_\mu \hat{A}^{(+)\mu}(x^\mu) \left|\psi\right\rangle = i \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \left|\mathbf{k}\right| \left[\hat{a}_3(\mathbf{k}) - \hat{a}_0(\mathbf{k})\right] e^{-ik_\mu x^\mu} \left|\psi\right\rangle = 0,
$$

oder

$$
\left[\hat{a}_3(\mathbf{k}) - \hat{a}_0(\mathbf{k})\right] \left|\psi\right\rangle = 0. \tag{5.44}
$$

Daraus ersehen wir, daß (5.41) die Linearkombination von longitudinalen und skalaren Photonen beschränkt ist; für transversale Photonen gibt es hingegen keine Einschränkungen.

Wir bestimmen nun den Erwartungswert von $\hat{n}_3(\mathbf{k}) - \hat{n}_0(\mathbf{k})$ für einen erlaubten Zustand $\left|\psi\right\rangle$:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \psi \left| \hat{a}_3^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_3(\mathbf{k}) \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \hat{a}_0^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_0(\mathbf{k}) \right| \psi \right\rangle = \\
&\qquad \left\{ \left\langle\psi\right| \left[\hat{a}_3^\dagger(\mathbf{k}) - \hat{a}_0^\dagger(\mathbf{k})\right] = 0 \quad \rightarrow \quad \left\langle\psi\right| \hat{a}_0^\dagger(\mathbf{k}) = \left\langle\psi\right| \hat{a}_3^\dagger(\mathbf{k}) \right\} \\
&= \left\langle \psi \left| \hat{a}_3^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_3(\mathbf{k}) \right| \psi \right\rangle - \left\langle \psi \left| \hat{a}_3^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_0(\mathbf{k}) \right| \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \psi \left| \hat{a}_3^\dagger(\mathbf{k}) \left[\hat{a}_3(\mathbf{k}) - \hat{a}_0(\mathbf{k})\right] \right| \psi \right\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{5.45}
$$

Damit folgt für den Erwartungswert von $\hat{H}$

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi \middle| \hat{H} \middle| \psi \right\rangle &= \left\langle \psi \middle| \sum_{r,\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} \zeta_r \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) \middle| \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \psi \middle| \sum_{\mathbf{k},r=1}^{2} \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) \middle| \psi \right\rangle \\
&\quad + \left\langle \psi \middle| \omega_{\mathbf{k}} \left[\hat{a}_3^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) - \hat{a}_0^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_0(\mathbf{k}) \right] \middle| \psi \right\rangle \\
&= \left\langle \psi \middle| \sum_{\mathbf{k},r=1}^{2} \omega_{\mathbf{k}} \hat{a}_r^\dagger(\mathbf{k}) \hat{a}_r(\mathbf{k}) \middle| \psi \right\rangle, \qquad (5.46)
\end{aligned}$$

und damit tragen nur die transversalen Photonen zum Erwartungswert bei. Gleiches gilt für alle anderen Observablen.

Es können also aufgrund von (5.41) im freien Raum Observable nur transversale Photonen enthalten und dies erklärt die frühere Behauptung, daß skalare und longitudinale Photonen nicht beobachtet werden. Aufgrund unserer kovarianten Analyse können wir longitudinale und skalare Photonen ausschließen. Somit ist es am einfachsten in einer Eichung zu arbeiten, in welchem der Vakuumzustand $|0\rangle$ durch das Photonenvakuum repräsentiert wird. (Man könnte ihn natürlich auch durch keine transversalen und einer erlaubten Mischung von longitudinalen und skalaren Photonen beschreiben. Dies entspräche dann einer anderen Wahl für die Lorentzeichung.)

Sind allerdings Ladungen vorhanden, so ist die Situation komplizierter. (Wir haben dann kein freies Feld mehr vorliegen, $s^\mu \neq 0$!) Longitudinale und skalare Photonen können nicht mehr vernachlässigt werden. Sie können als virtuelle Teilchen in den Zwischenzuständen eine wesentliche Rolle spielen.

5.3 Der Photon-Propagator

Wir haben den Klein-Gordon Propagator (3.54) als den Austausch eines Mesons im Zwischenzustand interpretiert. Eine ähnliche Interpretation kann für den Photonen Propagator erwartet werden, nur daß jetzt vier Arten von Photonen ausgetauscht werden können.

Wir untersuchen nun den Propagator $D_F^{\mu\nu}(k^\mu)$ im Impulsraum, welcher dem im Ortsraum über

$$D_F^{\mu\nu}(x^\mu) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, D_F^{\mu\nu}(k^\mu) e^{-k_\mu x^\mu} \qquad (5.47)$$

zugeordnet ist. Aus (5.33) folgt:

$$\begin{aligned}
D_F^{\mu\nu}(x^\mu) &= -\frac{g^{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{e^{-ik_\mu x^\mu}}{k_\mu k^\mu + i\varepsilon} \\
D_F^{\mu\nu}(k^\mu) &= -\frac{g^{\mu\nu}}{k_\mu k^\mu + i\varepsilon} \\
&\overset{(5.26)}{=} \frac{1}{k_\mu k^\mu + i\varepsilon}\sum_r \zeta_r \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) \qquad (5.48) \\
&\overset{(5.28)}{=} \frac{1}{k_\mu k^\mu + i\varepsilon}\left\{\sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) + (-1)n^\mu n^\nu \right. \\
&\quad \left. + \frac{[k^\mu - (k_\nu n^\nu)n^\mu]\,[k^\nu - (k_\mu n^\mu)n^\nu]}{(k_\nu n^\nu)^2 - k_\nu k^\nu}\right\}. \qquad (5.49)
\end{aligned}$$

Wir bezeichnen nun mit

$$_T D_F^{\mu\nu}(k^\mu) = \frac{1}{k_\nu k^\nu + i\varepsilon}\sum_{r=1}^{2} \varepsilon_r^\mu(\mathbf{k})\varepsilon_r^\nu(\mathbf{k}) \qquad (5.50)$$

den Austausch transversaler Photonen. Die restlichen zwei Terme fassen wir so zusammen, daß ein Term proportional $n^\mu n^\nu$ entsteht. Es folgt aus (5.49)

$$D_F^{\mu\nu}(k^\mu) =_T D_F^{\mu\nu}(k^\mu) +_C D_F^{\mu\nu}(k^\mu) +_R D_F^{\mu\nu}(k^\mu), \qquad (5.51)$$

mit

$$_C D_F^{\mu\nu}(k^\mu) = \frac{n^\mu n^\nu}{(k_\rho n^\rho)^2 - k_\rho k^\rho}, \qquad (5.52a)$$

und

$$_R D_F^{\mu\nu}(k^\mu) = \frac{1}{k_\mu k^\mu + i\varepsilon}\left[\frac{k^\mu k^\nu - (k_\rho n^\rho)(k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu)}{(k_\rho n^\rho)^2 + k_\rho k^\rho}\right]. \qquad (5.52b)$$

Wir betrachten zuerst (5.52a):

$$\begin{aligned}
_C D_F^{\mu\nu}(x^\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k\, \frac{n^\mu n^\nu}{(k_\rho n^\rho)^2 - k_\rho k^\rho} e^{-ik_\rho x^\rho} \\
&\quad \left[\, (k_\rho n^\rho)^2 = k_0^2, \quad k_0^2 - k_\rho k^\rho = |\mathbf{k}|^2 \,\right] \\
&= \frac{g^{\mu 0} g^{\nu 0}}{(2\pi)^4}\int d^3k\, \frac{e^{-i\mathbf{kr}}}{|\mathbf{k}|^2}\int dk^0\, e^{-ik_0 x^0} \\
&= g^{\mu 0} g^{\nu 0}\frac{1}{4\pi\,|\mathbf{r}|}\delta(x^0) \qquad (5.53)
\end{aligned}$$

Dieser Term entspricht offensichtlich einem nicht retardierten (instantanen) Coulombpotential. Somit entspricht der durch (5.53) dargestellte Austausch von skalaren und longitudinalen Photonen der nicht retardierten Coulombwechselwirkungen zwischen Ladungen.

In Anhang C haben wir nur das transversale Strahlungsfeld quantisiert und die instantane Coulombwechselwirkung als klassisches Feld behandelt. Das Argument war, daß die instantane Coulombwechselwirkung keine unabhängigen Freiheitsgrade etabliert, sondern durch die Ladungen vollständig bestimmt ist. Nunmehr wurden auch die Skalar- und Longitudinalkomponenten des elektromagnetischen Feldes quantisiert und die instantane Coulombwechselwirkung erscheint nunmehr als der Austausch longitudinaler und skalarer Photonen.

Es ist nun abschließend der Beitrag (5.52b) zu diskutieren. In Anhang C wurde die vollständige elektromagnetische Wechselwirkung zwischen Ladungen durch Beiträge des transversalen Strahlungsfeldes und durch instantane Coulombfelder beschrieben. Wir haben in unserer kovarianten Analyse beiden Rechnung getragen und somit sollte der Beitrag (5.52b) zu allen Observablen verschwinden. Dies kann an dieser Stelle noch nicht gezeigt werden und wird in Kapitel 7 nachgeholt.