# Anhang A

## A.1 Elemente der affinen Geometrie

### A.1.1 Das Skalarprodukt

Wir betrachten einen $n$–dimensionalen metrischen Raum. Durch die Elemente $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n$ wird eine abelsche Gruppe gebildet, welche über dem Grundkörper der reellen Zahlen errichtet wird. Ein Element dieser Gruppe wird mit Hilfe von

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} a^i \mathbf{e}_i = a^i \mathbf{e}_i \tag{A.1}$$

gebildet. Durch diese Elemente $\mathbf{a}$ wird ein $n$–dimensionaler Vektorraum $\mathbb{R}^n$ aufgespannt. Wir führen nun das *Skalarprodukt* zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ ein, welches dem distributiven Gesetz gehorchen soll:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} &\in \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &\stackrel{!}{=} \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \end{aligned}$$

und daraus folgt mit (A.1):

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a^i \mathbf{e}_i \cdot b^j \mathbf{e}_j \\ &= a^i b^j \left( \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \right). \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \tag{A.2}$$

wobei $g_{ij}$ eine Zahl des Grundkörpers ist. Diese Zahlen prägen dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ eine *Metrik* auf, und es gilt für das Skalarprodukt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = g_{ij} a^i b^j.$$

Daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß das Skalarprodukt, wie schon der Name ausdrückt, ein Skalar ist.

Wir führen nun einen zweiten Satz von Elementen ein:

$$\left\{\mathbf{e}^i\right\}_{i=1,\ldots,n} \in \mathbb{R}^n, \tag{A.3}$$

und definieren für diese

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j \stackrel{!}{=} \delta_{ij}. \tag{A.4}$$

Damit werden mit den Sätzen $\{\mathbf{e}_i\}$ und $\{\mathbf{e}^i\}$ zwei $n$–Beine definiert, wobei wegen (A.4) $\{\mathbf{e}_i\}$ das zu $\{\mathbf{e}^i\}$ orthogonale $n$-Bein ist. Ist nun $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i = 1 = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^i$, so können wir die $\{\mathbf{e}_i\}$ bzw. die $\{\mathbf{e}^i\}$ als Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ bezeichnen.

Wir können natürlich $\mathbf{a}$ aus (A.1) auch wie folgt ausdrücken:

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}^i. \tag{A.5}$$

Man bezeichnet nun den Satz von Komponenten $\{a_i\}$ als die *kovarianten* und den Satz $\{a^i\}$ als die *kontravarianten* Komponenten des Vektors $\mathbf{a}$. Der Übergang von einem Satz zum anderen ist leicht gfunden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i &= a^k(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^i) = a^k\,(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^i) = a^i \\
&= a_k\,(\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^i) = a_k\,(\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^i) = a_k g^{ki} \\
\Longrightarrow \quad a^i &= g^{ki} a_k
\end{aligned} \tag{A.6}$$

oder umgekehrt:

$$a_i = g_{ki} a^k. \tag{A.7}$$

Man spricht vom *Herauf*– bzw. *Herunterziehen* des Index.

Für das Skalarprodukt gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_i \mathbf{e}^i \cdot b^k \mathbf{e}_k = a_i b^k\,(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k) = a_i b^i \\
&= a^i \mathbf{e}_i \cdot b_k \mathbf{e}^k = a^i b_k\,(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k) = a^i b_i.
\end{aligned}$$

Nachdem das Skalarprodukt ein Skalar ist, ist das Ergebnis eine Invariante und es muß gelten:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b^i = a^i b_i = \mathrm{Inv.} \tag{A.8}$$

Es kann nun der Zusammenhang zwischen den Komponenten $g_{ik}$ und $g^{ik}$ leicht hergestellt werden:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^k &= (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}^k)\,\mathbf{e}_j = g^{jk} \mathbf{e}_j \\
\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k &= \delta_i{}^k \stackrel{!}{=} g_i{}^k = g^{jk}\,(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = g^{jk} g_{ij},
\end{aligned}$$

also gilt:

$$\delta_i{}^k = g_{ij} g^{jk}. \tag{A.9}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der *metrischen Komponenten* $g^{ik}$ bei Kenntnis der Komponenten $g_{ij}$. Als Lösung erhält man:

$$g^{jk} = \frac{G_{ij}}{g}\delta_{ik} = \frac{G_{kj}}{g} = \frac{G_{jk}}{g} \tag{A.10}$$

mit

$$g = \det\left(g_{ij}\right).$$

Die $G_{jk}$'s sind dabei die algebraischen Komplemente der $g_{jk}$'s. Es reicht somit die Kenntnis eines $n$–Beines aus um das andere bestimmen zu können.

### A.1.2 Der Minkovski Vierervektor

#### Definition

Aus der Vorlesung über analytische Mechanik[1] wissen wir, daß in der speziellen Relativitätstheorie die Zeit eine relative Größe ist, daß wir also die Zeit als eine zusätzliche Koordinate einführen können. Unser Konfigurationsraum wird also ein vierdimensionaler Vektorraum sein, und ein Punkt (Ereignis) wird in diesem Raum durch einen *Vierervektor*

$$(x^\mu) = x^\mu = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) \tag{A.11}$$

beschrieben, wobei wir im speziellen $x^0 = t$ (die Zeit, $c = 1!$) setzen und die $x^j, j = 1, 2, 3$ sind dann die drei Raumkomponenten.[2] (Griechische Indizes können demnach, nach Konvention, die Werte 0,…,3 annehmen, während lateinische Indizes die Werte 1, 2 und 3 annehmen.)

Der neue Raum soll eben (euklidisch) sein, er soll aber auch in seiner Metrik spezielle Eigenschaften der kovarianten Wellenausbreitung berücksichtigen. Dazu benötigen wir einige Ergebnisse zur inhomogenen Wellengleichung.

#### Die inhomogene Wellengleichung

Die inhomogene Wellengleichung lautet:

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t), \tag{A.12}$$

[1] Siehe: B. Schnizer, Skriptum zur Vorlesung *Analytische Mechanik*, Kapitel 10.

[2] In einer älteren Nomenklatur wurde eine vierte Komponente $x^4 = it$ an Stelle von $x^0$ eingeführt.

mit $g(\mathbf{r},t)$ als den Quellen der Schwingung. (A.12) ist eine lineare Differentialgleichung, welche nach der Methode der Greenschen Funktionen gelöst werden kann. Man bestimmt also zuerst die Lösung von

$$\left(\nabla_{\mathbf{r}}^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')$$

unter Berücksichtigung der Homogenität des leeren Raumes. Die Greensche Funktion $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ wird dabei mit

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = 0, \qquad (t-t') < |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \tag{A.13}$$

bestimmt. Es beschreibt daher

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = x^j x_j = \left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + \left(x^3\right)^2 < t^2 = \left(x^0\right)^2$$

das Innere eines vierdimensionalen Kegels, des *Lichtkegels.*

Im Vakuum breiten sich alle Wirkungen mit Lichtgeschwindigkeit aus und daher wird $G(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ *nur auf dem Lichtkegel* von Null verschieden sein. Ist nun $\mathbf{r}'$ im Ursprung gelegen, so folgt als Bedingung:

$$\left(x^0\right)^2 - x^j x_j = 0. \tag{A.14}$$

## Die Minkovski Metrik

Die Minkowski Metrik der Raumzeit läßt sich nun unmittelbar für einen Vierervektor (A.11) unter Verwendung von (A.7) und (A.8) begründen:

$$\begin{aligned} x_\nu x^\nu &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu \\ &\overset{!}{=} \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 \end{aligned}$$

woraus unmittelbar

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= 0, \qquad \mu \neq \nu \\ g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} &= 1 \end{aligned} \tag{A.15}$$

folgt. Damit konnte die Minkovski Metrik der Raumzeit aufgefunden werden. Sie wird auch häufig als eine *pseudo–euklidische* Metrik bezeichnet. Es ist dies eine Metrik mit negativer *Signatur.*

### Das Transformationsverhalten

Wir definieren zunächst im $n$–dimensionalen Raum einen zweistufigen Tensor $T$ über eine lineare Vektorfunktion[3]

$$\mathbf{a} = T\mathbf{b}, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \tag{A.16}$$

und suchen die Komponenten des Tensors $T$. Wir schreiben

$$\mathbf{a} = T\mathbf{b} = \mathbf{p}_n\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{b}, \tag{A.17}$$

wobei $\mathbf{p}_n\mathbf{q}_n$ das diadische Produkt zweier Vektoren $\mathbf{p}_n$ und $\mathbf{q}_n$ ist.

Sind nun $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zwei Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_i\mathbf{e}^i \\ \mathbf{b} &= b_i\mathbf{e}^i, \end{aligned}$$

so definieren wir die Dyade $\Theta$ (etwa im $\mathbb{R}^3$) über[4]

$$\begin{aligned} \Theta &= \mathbf{ab} \\ &= a_i\mathbf{e}^i b_j\mathbf{e}^j \\ &= a_1b_1\mathbf{e}^1\mathbf{e}^1 + a_1b_2\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2 + a_1b_3\mathbf{e}^1\mathbf{e}^3 + \dots \end{aligned}$$

Die Dyade ist somit durch sechs unabhängige Größen bestimmt. Ein Tensor zweiter Stufe ist, in drei Dimensionen, hingegen durch neun unabhängige Größen bestimmt. Wir verallgemeinern nun die Dyade zum Tensor durch:

$$\begin{aligned} T &= \alpha\mathbf{e}^1\mathbf{e}^1 + \beta\mathbf{e}^1\mathbf{e}^2 + \gamma\mathbf{e}^1\mathbf{e}^3 + \\ &\quad \alpha'\mathbf{e}^2\mathbf{e}^1 + \beta'\mathbf{e}^2\mathbf{e}^2 + \gamma'\mathbf{e}^2\mathbf{e}^3 + \\ &\quad \alpha''\mathbf{e}^3\mathbf{e}^1 + \beta''\mathbf{e}^3\mathbf{e}^2 + \gamma''\mathbf{e}^3\mathbf{e}^3 \\ &= \mathbf{p}_1\mathbf{e}^1 + \mathbf{p}_2\mathbf{e}^2 + \mathbf{p}_3\mathbf{e}^3 \end{aligned} \tag{A.18}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \alpha\mathbf{e}^1 + \alpha'\mathbf{e}^2 + \alpha''\mathbf{e}^3 \\ \mathbf{p}_2 &= \beta\mathbf{e}^1 + \beta'\mathbf{e}^2 + \beta''\mathbf{e}^3 \\ \mathbf{p}_3 &= \gamma\mathbf{e}^1 + \gamma'\mathbf{e}^2 + \gamma''\mathbf{e}^3. \end{aligned}$$

[3]Tensoren werden üblicher Weise über das Transformationsverhalten eingeführt, hier wollen wir aber einen anderen Weg gehen, welcher die Einführung der Dyade notwendig macht. Dieses Element wird vor allem in älterer Literatur zur Elektrodynamik angewendet.

[4]W. Papoušek, *Vektor-Tensor Rechnung I*, Definition 4.1.

Wir bestimmen im weiteren das Skalarprodukt zwischen Dyade und Vektor:

$$\begin{aligned}
\Theta\mathbf{p} &= \Theta\, p^i \mathbf{e}_i \\
&= a_i b_j \mathbf{e}^i (\mathbf{e}^j \cdot p^k \mathbf{e}_k) \\
&= \quad \left\{ \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k = \delta^j{}_k \right\} \\
&= a_i \mathbf{e}^i b_j p^k \delta^j{}_k \\
&= a_i \mathbf{e}^i b_j p^j \\
&= a_i \mathbf{e}^i \, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) \\
&= \mathbf{a}\, (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) \qquad \text{(A.19)}
\end{aligned}$$

und das Ergebnis ist somit ein Vektor. Die Gleichung (A.17) kann nun leicht im Sinne von Gleichung (A.18) und (A.19) verstanden werden. In Komponenten folgt für (A.17):

$$a_i = p_{n,i} q_{n,k} b^k = T_{ik} b^k \qquad \text{(A.20)}$$

und wir finden weiter:

$$\begin{aligned}
T\mathbf{e}_k &= \mathbf{p}_n \, (\mathbf{q}_n \cdot \mathbf{e}_k) \\
&= \mathbf{p}_n q_{n,i} \left( \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k \right) \\
&= \mathbf{p}_n q_{n,k} \qquad \text{(A.21)} \\
T\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i &= (\mathbf{p}_n \cdot \mathbf{e}_i)\, q_{n,k} \\
&= p_{n,i} q_{n,k} \\
\Longrightarrow \; T_{ik} &= T\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i. \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}$$

Daraus folgt schließlich:

$$\begin{aligned}
T^{ik} &= T\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^i = p_n^i q_n^k \\
T^i{}_k &= T\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}^i = p_n{}^i q_{n,k} \\
T_i{}^k &= T\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i = p_{n,i} q_n{}^k.
\end{aligned}$$

Man kann nun offensichtlich, wie schon bei den Vektoren, Indizes hinauf- und herunterziehen:

$$\begin{aligned}
T^{ik} &= p_n{}^i q_n{}^k \\
&= g^{ir} p_{n,r} g^{ks} q_{n,s} \\
&= g^{ir} g^{ks} T_{rs}. \qquad \text{(A.23)}
\end{aligned}$$

Wir können nun wieder zum eigentlichen Problem zurückkehren: die Norm eines Vierervektors ist ein Skalar, welcher natürlich bei Transformationen von einem Inertialsystem zum anderen invariant bleiben muß. Wir haben also Transformationen der Form

$$x^\mu \quad \xrightarrow{\Lambda} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{A.24}$$

mit der Forderung

$$x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu = \mathrm{Inv} \tag{A.25}$$

oder

$$t'^2 - \left(x'^1\right)^2 - \left(x'^2\right)^2 - \left(x'^3\right)^2 = t^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2, \tag{A.26}$$

was durch eine Galilei Transformation nicht bewerkstelligt werden kann. Es folgt:

$$\begin{aligned} x'^\mu x'_\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \Lambda_\mu{}^\eta x_\eta \\ &= \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\eta x^\nu x_\eta \\ &\stackrel{!}{=} x^\mu x_\mu . \end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\eta = \delta_\nu{}^\eta \tag{A.27}$$

als Forderung für die Komponenten jenes Transformationstensors, welcher $x^\mu x_\mu$ invariant läßt. Somit ist ein beliebiges vierkomponentiges Objekt $s^\mu$ ($s_\mu$), welches wie $x^\mu$ unter Lorentztransformationen transformiert, also $s^\mu s_\mu$ invariant hält, ein kontravarianter (kovarianter) Vierervektor.

Wir untersuchen nun, ob die Lorentztransformation die gesuchte Transformationseigenschaft aufweist. Dazu schreiben wir die spezielle Lorentztransformation in der Form:

$$\begin{aligned} x'^0 &= \gamma x^0 - \gamma\beta x^3 \\ x'^1 &= x^1 \\ x'^2 &= x^2 \\ x'^3 &= \gamma x^3 - \gamma\beta x^0, \end{aligned} \tag{A.28}$$

mit

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = v, \tag{A.29}$$

mit $v$ der relativen Geschwindigkeit (bezogen auf die Lichtgeschwindigkeit) der beiden Koordinatensysteme, und setzen in (A.26) ein:

$$\begin{aligned} &\left(x'^0\right)^2 - \left(x'^1\right)^2 - \left(x'^2\right)^2 - \left(x'^3\right)^2 = \\ &= \left(\gamma x^0 - \gamma\beta x^3\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(\gamma x^3 - \gamma\beta x^0\right)^2 \\ &= \gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \gamma^2\left(1-\beta^2\right)\left(x^3\right)^2 \\ &\stackrel{(A.29)}{=} \left(x^0\right)^2 - \left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2 - \left(x^3\right)^2 . \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß die spezielle Lorentztransformation (und natürlich auch die allgemeine, ohne Beweis) die geforderte Invarianzeigenschaft aufweist. Man sagt auch, daß ein Vierervektor *Lorentz kovariant* ist.

Für die Transformation (A.24) finden wir noch:

$$\Lambda = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} . \tag{A.30}$$

Die zweifache Anwendung einer Lorentztransformation ist wieder eine Lorentztransformation, es existiert weiters das Einselement (für $v = 0$) und es existiert die inverse Transformation. Damit bilden die Lorentztransformationen eine Gruppe, die *Lorentzgruppe.*

Die vierdimensionale Verallgemeinerung des Nablaoperators

$$\partial_\mu = \left( \frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right)$$

transformiert wie jeder andere Vierervektor. Ist nun $\phi(x^\mu)$ eine skalare Funktion, so gelte

$$\delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \delta x^\mu$$

und wir schreiben verkürzt

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi$$

als kovarianten Vierervektor, oder

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} = \partial^\mu \phi$$

als kontravarianten Vierervektor. Daraus folgt dann weiters der vierdimensionale Laplaceoperator

$$\begin{aligned} \partial^\mu \partial_\mu &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \\ &= g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \end{aligned} \tag{A.31}$$

als Lorentz invarianter Operator.