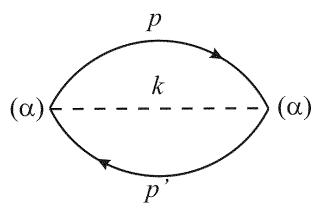
Anhang G

G.1 Vakuum Fluktuationen

Der Beitrag der Vakuumfluktuationen zur S-Matrix wird durch das Diagramm



dargestellt und durch

$$\hat{S}^{(2)} \propto \int d^4p d^4p' d^4k \, \delta^{(4)}(k+p-p')\delta^{(4)}(k+p-p') \frac{1}{k^2} \mathrm{Tr} \left(\frac{i \not{p} - m_0}{p^2 + m_0^2} \gamma^\alpha \frac{i \not{p}' - m_0}{p'^2 + m_0^2} \gamma_\alpha \right)$$

beschrieben. Die Integration über k^μ kann ausgeführt werden und ergibt:

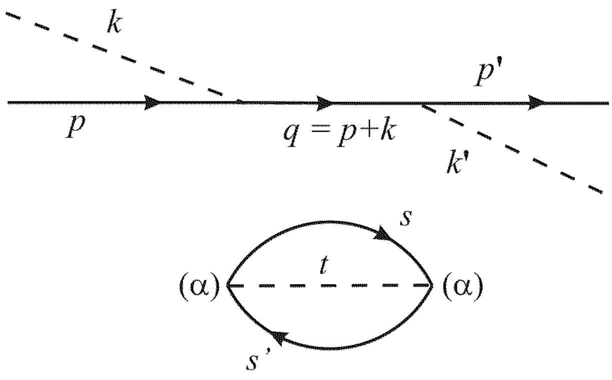
$$\hat{S}^{(2)} \propto \delta^{(4)}(0) \int d^4p d^4p' \, \frac{1}{(p-p')^2} \mathrm{Tr} \left(\frac{i \not{p} - m_0}{p^2 + m_0^2} \gamma^\alpha \frac{i \not{p}' - m_0}{p'^2 + m_0^2} \gamma_\alpha \right) .$$

Dieser Ausdruck ist divergent. Zunächst haben wir den Faktor $\delta^{(4)}(0)$, welcher von der Tatsache herrührt, daß Vakuumfluktuationen keine externen Linien haben, und daß daher in diesen Ausdrücken gleich viele $\delta^{(4)}$-Faktoren wie Vertizes auftreten. Dieses $\delta^{(4)}(0)$ ist natürlich unendlich und zeigt eigentlich, daß all diese Matrixelemente proportional dem vierdimensionalen Volumen im x^μ-Raum sind, innerhalb welchem das Feld untersucht wird.

Nun wird aber dieses $\delta^{(4)}(0)$ in obigem Beispiel mit einem Doppelintegral über d^4p und d^4p' multipliziert, welches ebenfalls divergent ist. *Alle* Vakuumfluktuations-Diagramme führen zu Divergenzen dieser Art.

Entsprechend unserer bisherigen Argumentationslinie beschreiben die S-Matrix Elemente die Transformation von Zustandsvektoren im Wechselwirkungsbild von der fernen Vergangenheit in die ferne Zukunft. Unter solchen Transformationen muß der Vakuumzustand unverändert bleiben.

Vakuumfluktuations-Diagramme können nun im Zusammenhang mit anderen Diagrammen auftreten, welche reale Prozesse beschreiben. Betrachten wir dazu das Diagramm vierter Ordnung eines Compton-Prozesses:



Ein solches Diagramm besteht aus zwei nicht zusammenhängenden Diagrammteilen, von denen einer eine Vakuumfluktuation repräsentiert. Solche Diagramme sind mit Ausdrücken verbunden, welche ein Produkt aus zwei Faktoren sind, welche den beiden nicht zusammenhängenden Teilen entsprechen. Daraus folgt, daß jedes Matrixelement eines beliebigen, reellen Prozesses mit einem numerischen Faktor zu multiplizieren ist, welcher dem Produkt aller Vakuumfluktuations-Diagramme entspricht. Dieses Produkt sei durch

$$C = \prod_i M_{vi}$$

gegeben, mit M_{vi} dem Beitrag der i-ten Vakuumfluktuation. Man kann dann dann die S-Matrix als

$$\hat{S} = C\hat{S}'$$

schreiben, wobei $\hat{S}'$ die S-Matrix ist, welche keine Vakuumfluktuations-Diagramme enthält.

Wir stellen nun fest, daß wegen der Erhaltung des Viererimpulses kein Matrixelement existiert, welches die Vakuumfluktuation mit irgendeinem anderen Zustand verknüpft. Damit folgt, daß der Vakuumzustand ein Eigenzustand von $\hat{S}$ ist und sein Eigenwert ist gerade C:

$$\hat{S}\,|0\rangle = C\,|0\rangle\,.$$

Ist nun $\hat{S}$ ein unitärer Operator, so muß C ein Faktor der Größe 1 sein, also muß

$$|C|^2 = 1, \quad \to \quad C = e^{i\alpha}$$

gelten. Unsere vorhergehende Feststellung, daß jedes Vakuumfluktuations-Diagramm eine undendliche große Zahl zu C beiträgt muß nun dahingehend interpretiert werden, daß die Phase α unendlich wird und damit die Reihenentwicklung von e ungültig wird.

Wir können nun formal das Weglassen der Vakuumfluktuationen rechtfertigen. Wir transformieren alle Zustandsvektoren wie

$$|\omega\rangle \quad \to \quad |\omega'\rangle = e^{-i\alpha} |\omega\rangle \, .$$

Da Phasentransformationen eines Zustandes keinen Einfluß auf die Berechnung irgendwelcher physikalischer Prozesse hat, können wir diese Prozesse unter Verwendung der S-Matrix $\hat{S}'$ ausführen, welche keine Vakuumfluktuationen enthält. Ist $\hat{S}$ unitär, so ist $\hat{S}'$ ebenfalls unitär.

Es ist somit unnotwendig die Vakkumfluktuations-Diagramme zu berücksichtigen.