VIELTEILCHEN-BOSONEN

ORTS-RAUM $\rightarrow$ TEILCHENZAHL-RAUM

$$\left[\sum_{n=1}^{N} \hat{O}^{(n)} + \frac{1}{2}\sum_{m}^{N}\sum_{\neq n}^{N} \hat{O}^{(m,n)} - i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = 0 \quad \mathbf{(6.2)}$$

$$\psi_{E_1,\ldots,E_N}(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N; t) \sim \sum_{\nu} \mathcal{P}_\nu \left\{u_{E_1}(\mathbf{r}_1)\, u_{E_2}(\mathbf{r}_2) \cdots u_{E_N}(\mathbf{r}_N)\right\} f(t) \quad \mathbf{(6.5)}$$

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = \sum_{E'_1}\sum_{E'_2}\cdots\sum_{E'_N} A(E'_1, E'_2, \ldots, E'_N; t)\, u_{E'_1}(\mathbf{r}_1)\, u_{E'_2}(\mathbf{r}_2) \cdots u_{E'_N}(\mathbf{r}_N) \quad \mathbf{(6.5)}$$

$$\int d^3r_1 \,\cdots\, d^3r_N \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) \,\cdots\, u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N)$$

$$\times \left[\sum_{n=1}^{N} \hat{O}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{m}^{N} \sum_{\neq n}^{N} \hat{O}^{(m,n)} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = 0$$

Anwendung dieser Rechentechnik auf Zeit- und Teilchen-Operatoren:

$$\int d^3r_1 \,\cdots\, d^3r_N \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) \,\cdots\, u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N)$$

$$\times \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \hat{O}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{m}^{N} \sum_{\neq n}^{N} \hat{O}^{(m,n)} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = 0$$

mit

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = \sum_{E'_1} \cdots \sum_{E'_N} A(E'_1, \ldots, E'_N; t) \, u_{E'_1}(\mathbf{r}_1) \cdots u_{E'_N}(\mathbf{r}_N)$$

Anwendung dieser Rechentechnik auf den Zeit-Operator:

$$\int d^3r_1 \cdots d^3r_N \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) \cdots u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N)$$
$$\times \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \hat{O}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{m}^{N} \sum_{\neq n}^{N} \hat{O}^{(m,n)} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = 0$$

mit

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = \sum_{E_1'} \cdots \sum_{E_N'} A(E_1', \ldots, E_N'; t) \, u_{E_1'}(\mathbf{r}_1) \cdots u_{E_N'}(\mathbf{r}_N)$$

Die Basisfunktionen $u_E(\mathbf{r})$ **sind orthonormal!!**

$$\sum_{E_1'} \cdots \sum_{E_N'} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) A(E_1', \ldots, E_N'; t) \underbrace{\int d^3r_1 \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) u_{E_1'}(\mathbf{r}_1)}_{\delta_{E_1, E_1'}} \cdots \underbrace{\int d^3r_N \, u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N) u_{E_N'}(\mathbf{r}_N)}_{\delta_{E_N, E_N'}} =$$
$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A(E_1, \ldots, E_N; t)$$

Anwendung dieser Rechentechnik auf Ein-Teilchen-Operatoren:

$$\int d^3r_1 \cdots d^3r_N \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) \cdots u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N)$$
$$\times \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \hat{O}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{m}^{N} \sum_{\neq n}^{N} \hat{O}^{(m,n)} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = 0$$

mit

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = \sum_{E_1'} \cdots \sum_{E_N'} A(E_1', \ldots, E_N'; t) \, u_{E_1'}(\mathbf{r}_1) \cdots u_{E_N'}(\mathbf{r}_N)$$

Die Basisfunktionen $u_E(\mathbf{r})$ sind orthonormal!!

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{E_1'} \cdots \sum_{E_N'} A(E_1', \ldots, E_N'; t) \\
&\times \underbrace{\int d^3r_1 \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) u_{E_1'}(\mathbf{r}_1)}_{\delta_{E_1, E_1'}} \cdots \\
&\times \underbrace{\int d^3r_n \, u^*_{E_n}(\mathbf{r}_n) \, \hat{O}^n \, u_{E_n'}(\mathbf{r}_n)}_{<E_n|\hat{O}^n|E_{n'}>} \cdots \\
&\times \underbrace{\int d^3r_N \, u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N) u_{E_N'}(\mathbf{r}_N)}_{\delta_{E_N, E_N'}} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \sum_{E_n'} A(E_1, \ldots, E_{n-1}, E_n', E_{n+1}, \ldots, E_N; t) \; < E_n|\hat{O}^{(n)}|E_n' >
\end{aligned}$$

Anwendung dieser Rechentechnik auf Ein-Teilchen-Operatoren:

$$\int d^3r_1 \cdots d^3r_N \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) \cdots u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N)$$
$$\times \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \hat{O}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{m}^{N} \sum_{\neq n}^{N} \hat{O}^{(m,n)} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = 0$$

mit

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = \sum_{E'_1} \cdots \sum_{E'_N} A(E'_1, \ldots, E'_N; t) \, u_{E'_1}(\mathbf{r}_1) \cdots u_{E'_N}(\mathbf{r}_N)$$

Die Basisfunktionen $u_E(\mathbf{r})$ sind orthonormal!!

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{n=1}^{N} \sum_{E'_1} \cdots \sum_{E'_N} A(E'_1, \ldots, E'_N; t) \\
&\times \underbrace{\int d^3r_1 \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) u_{E'_1}(\mathbf{r}_1)}_{\delta_{E_1, E'_1}} \cdots \\
&\times \underbrace{\int d^3r_n \, u^*_{E_n}(\mathbf{r}_n) \, \hat{O}^n \, u_{E'_n}(\mathbf{r}_n)}_{<E_n|\hat{O}^n|E_{n'}>} \cdots \\
&\times \underbrace{\int d^3r_N \, u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N) u_{E'_N}(\mathbf{r}_N)}_{\delta_{E_N, E'_N}} \\
&= \sum_{n=1}^{N} \sum_{W} A(E_1, \ldots, E_{n-1}, W, E_{n+1}, \ldots, E_N; t) \; < E_n|\hat{O}^{(n)}|W >
\end{aligned}$$

Anwendung dieser Rechentechnik auf Zwei-Teilchen-Operatoren:

$$\int d^3r_1 \cdots d^3r_N \, u^*_{E_1}(\mathbf{r}_1) \cdots u^*_{E_N}(\mathbf{r}_N)$$
$$\times \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^{N} \hat{O}^{(n)} + \frac{1}{2} \sum_{m}^{N} \sum_{\neq n}^{N} \hat{O}^{(m,n)} \right] \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = 0$$

mit

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = \sum_{E'_1} \cdots \sum_{E'_N} A(E'_1, \ldots, E'_N; t) \, u_{E'_1}(\mathbf{r}_1) \cdots u_{E'_N}(\mathbf{r}_N)$$

Diese Berechnung ist im Prinzip dieselbe wie bei den Einteilchen-Operatoren, nur um einiges umfangreicher. Hier soll nur das Ergebnis angegeben werden:

$$S_2 = \frac{1}{2} \sum_{m}^{N} \sum_{\neq n}^{N} \sum_{W} \sum_{W'} A(E_1, \ldots, E_{m-1}, W, E_{m+1}, \ldots, E_{n-1}, W', E_{n+1}, \ldots, E_N; t)$$
$$\times \; \langle E_m E_n | \, \hat{O}^{(m,n)} \, | W \, W' \rangle \; .$$

ZUSAMMENFASSUNG

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}A(E_1,\ldots,E_N;t) = S_1 + S_2 \qquad (6.8)$$

mit

$$S_1 = \sum_{n=1}^{N}\sum_{W} A(E_1,\ldots,E_{n-1},W,E_{n+1},\ldots,E_N;t)\,\langle E_n|\,\hat{O}^{(n)}\,|W\rangle \qquad (6.9)$$

und

$$S_2 = \frac{1}{2}\sum_{m}^{N}\sum_{\neq n}^{N}\sum_{W}\sum_{W'}$$

$$A(E_1,\ldots,E_{m-1},W,E_{m+1},\ldots,E_{n-1},W',E_{n+1},\ldots,E_N;t)$$

$$\times\,\langle E_m E_n|\,\hat{O}^{(m,n)}\,|W\,W'\rangle\ . \qquad (6.10)$$

Grundsätzliche Symmetrieeigenschaft einer Bosonen-Vielteilchenfunktion:

$$\Psi(\ldots\, \mathbf{r}_m,\, \ldots\, , \mathbf{r}_n,\, \ldots ; t) \stackrel{!}{=} \Psi(\ldots\, \mathbf{r}_n,\, \ldots\, , \mathbf{r}_m,\, \ldots ; t). \qquad (\mathbf{6.13})$$

Konsequenz für die Koeffizientenfunktion A:

$$A(E_1, \ldots, E_m, \ldots, E_n, \ldots, E_N; t) \stackrel{!}{=} A(E_1, \ldots, E_n, \ldots, E_m, \ldots, E_N; t)$$

bzw.

$$A(\mathcal{P}\{E_1 \ldots E_N\}; t) \equiv A(E_1 \ldots E_N; t) \qquad (\mathbf{6.14})$$

mit $\mathcal{P}\{\ldots\}$ = eine beliebige Permutation der Indizes 1 bis N.

$$|\tilde{A}(n_1, n_2, \ldots, n_\infty; t)|^2 = \frac{N!}{n_1!\, n_2! \cdots n_\infty!} |A(E_1, \ldots, E_N; t)|^2$$

$$A(E_1, \ldots, E_N; t) = \left(\frac{n_1!\, n_2! \cdots n_\infty!}{N!} \right)^{1/2} \tilde{A}(n_1, n_2, \ldots, n_\infty; t) \quad (6.17)$$

Dies führt nach einiger Rechnung [S. 94, 95]) zum Ergebnis

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \tilde{A}(n_1, \ldots, n_\infty; t) = \sum_E n_E \langle E | \hat{O} | E \rangle \tilde{A}(n_1, \ldots, n_\infty; t) + \sum_{E \neq W} \langle E | \hat{O} | W \rangle \sqrt{n_E} \sqrt{n_W + 1} \times \tilde{A}(n_1, \ldots, n_E - 1, \ldots, n_W + 1, \ldots, n_\infty; t) + \ldots \quad (6.25)$$

Vergleiche mit (6.8), (6.9):

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} A(E_1, \ldots, E_N; t) = \sum_{n=1}^{N} \sum_W A(E_1, \ldots, E_{n-1}, W, E_{n+1}, \ldots, E_N; t) \langle E_n | \hat{O}^{(n)} | W \rangle + \cdots$$

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_N; t) = \\ \sum_{E_1} \sum_{E_2} \ldots \sum_{E_N} A(E_1, E_2, \ldots, E_N; t)\, u_{E_1}(\mathbf{r}_1)\, u_{E_2}(\mathbf{r}_2) \cdots u_{E_N}(\mathbf{r}_N)$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_\infty=0}^{\infty} \tilde{A}(n_1, n_2, \ldots, n_\infty)\, |n_1, n_2, \ldots, n_\infty\rangle \qquad \mathbf{(6.29)}$$

Seite 99:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \\ = \sum_{n_1,\ldots,n_\infty} \sum_{E} n_E \, \langle E| \, \hat{O} \, |E\rangle \; \tilde{A}(n_1, \ldots, n_\infty; t)\, |n_1, \ldots, n_\infty\rangle + \\ \sum_{n_1,\ldots,n_\infty} \sum_{E \neq W} \sqrt{n_E(n_W + 1)}\, \langle E| \, \hat{O} \, |W\rangle \; \times \\ \tilde{A}(n_1, \ldots, n_E - 1, \ldots, n_W + 1, \ldots, n_\infty; t)\, |n_1, \ldots, n_\infty\rangle + \ldots$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \\ = \sum_{n_1,\ldots,n_\infty} \sum_{E} n_E \, \langle E| \, \hat{O} \, |E\rangle \; \tilde{A}(n_1, \ldots, n_\infty; t)\, |n_1, \ldots, n_\infty\rangle + \\ \sum_{n'_1,\ldots,n'_\infty} \sum_{E \neq W} \langle E| \, \hat{O} \, |W\rangle \; \tilde{A}(n'_1, \ldots, n'_E, \ldots, n'_W, \ldots, n'_\infty; t) \times \\ \sqrt{n'_W} \sqrt{n'_E + 1}\; |n'_1, \ldots, n'_E + 1, \ldots, n'_W - 1, \ldots, n'_\infty\rangle + \ldots$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle =$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_\infty}\sum_E n_E \left\langle E\right|\hat{O}\left|E\right\rangle \tilde{A}(n_1,\ldots,n_\infty;t)\left|n_1,\ldots,n_\infty\right\rangle +$$

$$+\sum_{n_1,\ldots,n_\infty}\sum_E\sum_{\neq W}\left\langle E\right|\hat{O}\left|W\right\rangle \hat{b}_E^\dagger\hat{b}_W\tilde{A}(n_1,\ldots,n_\infty;t)\left|n_1,\ldots,n_\infty\right\rangle+\ldots$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = \qquad (\mathbf{6.39})$$

$$\sum_{n_1,\ldots,n_\infty}\sum_E\sum_W\left\langle E\right|\hat{O}\left|W\right\rangle \hat{b}_E^\dagger\hat{b}_W\tilde{A}(n_1,\ldots,n_\infty;t)\left|n_1,\ldots,n_\infty\right\rangle+\ldots.$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = \left\{\sum_E\sum_W < E|\hat{O}|W > \hat{b}_E^\dagger\hat{b}_W+\cdots\right\}|\Psi(t)>$$

Hamiltonoperator in der Teilchenzahl-Darstellung:

$$\hat{H}=\sum_{i,j}\left\langle i\right|\hat{O}\left|j\right\rangle \hat{b}_i^\dagger\hat{b}_j+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}\left\langle i,j\right|\hat{O}\left|k,l\right\rangle \hat{b}_i^\dagger\hat{b}_j^\dagger\hat{b}_l\hat{b}_k. \qquad (\mathbf{6.40})$$