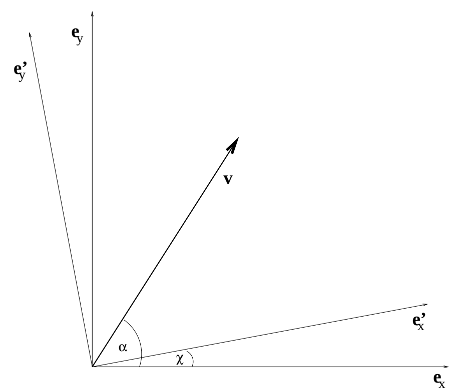
1. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2010

Abgabe: Dienstag, 09.03.2010, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 1: 2D Vektorraum: Projektionsoperatoren *(8 Punkte)*

Im zweidimensionalen euklidischen Vektorraum R^2 ist ein Vektor $\mathbf{v}$ durch folgende Skizze gegeben:



(a) Geben Sie die Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$ im ungestrichenen und im gestrichenen Koordinatensystem *mit Hilfe von Skalarprodukten* wie z.B. $(\vec{v}, \vec{e}_x) \equiv \vec{v} \cdot \vec{e}_x \equiv \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x$ an.

(b) Der Projektionsoperator $\hat{P}_x$ weist jedem Vektor $\mathbf{a}$ aus R^2 seine Komponente in Richtung $\mathbf{e}_x$ zu. Schreiben Sie $\hat{P}_x\mathbf{a}$ in Form von Skalarprodukten. Stellen Sie den Vektor $\mathbf{a}$ über seine Komponenten $\hat{P}_x\mathbf{a}$ und $\hat{P}_y\mathbf{a}$ dar.

(c) Zeigen Sie

$$\hat{P}_x\,\hat{P}_x\mathbf{a} = \hat{P}_x\,\mathbf{a} = \mathbf{a}_x \quad ,$$

also symbolisch $\hat{P}_x^2 = \hat{P}_x$. Schreiben Sie $\hat{P}_x$ als Matrix in der ungestrichenen Basis, also die Matrix, die bei Multiplikation mit einem Vektor $\mathbf{a}$ den Vektor $\hat{P}_x\mathbf{a}$ ergibt.

(d) Geben Sie die orthogonale Matrix R an, die zwischen den Koordinaten im gestrichenen und ungestrichenen System vermittelt:

$$\begin{pmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Schreiben Sie die Elemente dieser Matrix in Form von Skalarprodukten.

Aufgabe 2: Bra und Ket

(4 Punkte)

Geben Sie die Lösungen der Aufgabenteile a), b), c) der vorigen Aufgabe mit Hilfe der Bra- und Ket-Schreibweise an.

Aufgabe 3: Skalarprodukte

(4 Punkte)

Finden Sie Skalarprodukte, welche die Bedingungen der Definition im Skript erfüllen, für

(a) komplexe Funktionen $f(x)$ und

(b) $n \times n$-Matrizen,

Erläutern Sie jeweils kurz, warum die Bedingungen erfüllt sind.

Aufgabe 4: Kommutatoren

(4 Punkte)

A, B, und C seien beliebige $n \times n$ Matrizen. Der Kommutator zweier Matrizen ist als

$$[A, B] \;:=\; AB - BA$$

definiert. Die Spur (englisch "trace" tr) einer Matrix A ist die Summe über alle Diagonalelemente: Spur $A \equiv \mathrm{tr} A \;:= \sum_i A_{ii}$.
Zeigen Sie, dass

a) Spur $[A, B] = 0$

b) $[A, BC] = [A, B]C \,+\, B[A, C]$

c) $[A, [B, C]] + [C, [A, B]] + [B, [C, A]] = 0$