5. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2010

Abgabe: Dienstag, 27. 04. 2010, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 17: Dichtematrizen bei Spins *(5 Punkte)*

Geben Sie Dichtematrizen für die folgenden Spin-$\frac{1}{2}$-Systeme an, jeweils mittels Bras und Kets ausgedrückt, und auch als Matrix in der z-Basis.
Berechnen Sie jeweils $\langle S_x \rangle = \mathrm{tr}\, \hat{\rho}\, \hat{S}_x$.

a) Ein in $|+z\rangle$-Richtung polarisierter Strahl.

b) Ein in $|-y\rangle$-Richtung polarisierter Strahl.

c) Ein unpolarisierter Strahl.

d) Eine inkohärente Mischung von $\frac{1}{4}$ des Strahls aus (a) und $\frac{3}{4}$ des Strahls aus (b).

e) Geben Sie eine andere inkohärente Mischung mit derselben Dichtematrix wie in (d) an.

In welchen Fällen ist dies ein reiner Zustand ?

Aufgabe 18: Eigenschaften der Fouriertransformation *(6 Punkte)*

Zeigen Sie für kontinuierliche Fouriertransformationen die Beziehung c) und d), sowie entweder a) oder b):

(a) $\boxed{(\widetilde{x\,f})(k) \;=\; i\,\frac{d}{dk}\,\tilde{f}(k)}$

(b) $\boxed{(\widetilde{k\,\tilde{f}})(x) \;=\; -i\,\frac{d}{dx}\,f(x)}$

(c) $\tilde{f}(-k) = \tilde{f}^*(k)$, wenn $f(x) \in \mathbb{R}$

(d) <u>*Faltungssatz:*</u> Die Funktion $h = f \otimes g$ sei die Faltung der Funktionen f und g, d.h.

$$h(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\; g(y)\; dy. \quad \text{Zeigen Sie, dass} \quad \boxed{\tilde{h}(k) \;=\; \sqrt{2\pi}\;\tilde{f}(k)\;\tilde{g}(k)}$$

Eine Tilde steht hier abkürzend für die Fouriertransformation bzw. deren Umkehrung.
Anleitung: Setzen Sie bei (a) und (b) die Definition der linken Seiten als Integrale ein. Beim Faltungssatz können Sie z.B. auf der rechten Seite die Fouriertransformation als Integral

schreiben und dann eine Integrationsvariable geeignet substituieren. Falls nötig, können Sie benutzen, dass die Funktion f im Unendlichen verschwindet.

Aufgabe 19: Spinerwartungswerte *(6 Punkte)*

a) Berechnen Sie für ein Teilchen im Zustand $|\psi\rangle = |-n\rangle$ die Wahrscheinlichkeit, bei Messung von S_y den Wert $-\hbar/2$ zu finden.

b) Berechnen Sie im Zustand $|\psi\rangle = |-n\rangle$ den Erwartungswert $\langle \hat{S}_x \rangle$ und die Varianz $\langle (\hat{S}_x - \langle \hat{S}_x \rangle)^2 \rangle \equiv \langle \hat{S}_x^2 \rangle - \langle \hat{S}_x \rangle^2$. Für welchen Vektor $\vec{n}$ wird sie minimal? Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 20: Baker-Hausdorff-Formeln *(2 Punkte)*

Für Exponentialfunktionen von Operatoren, die nicht miteinander kommutieren, gelten nicht dieselben Rechenregeln wie für Zahlen, sondern die Baker-Hausdorff-Formeln

a) $\boxed{e^A\, e^B \;=\; e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+O(K)}}$

b) $\boxed{e^A\, e^B \;=\; e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]+O(K)}}$

c) $\boxed{e^A\, C\, e^{-A} \;=\; C \;+\; [A,C] \;+\; \frac{1}{2!}[A,[A,C]] \;+\; \frac{1}{3!}[A,[A,[A,C]]] \;+\; ...}$

wobei K abkürzend für Terme mit Vielfach-Kommutatoren wie z.B. $[A,[A,B]]$ steht. Verifizieren Sie *eine* dieser Formeln durch Entwickeln bis zu Produkten von maximal 2 Operatoren A, B. Funktionen von Operatoren sind durch die Potenzreihenentwicklung der Funktion definiert.