

6. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2010

Abgabe: Dienstag, 04. 05. 2010, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 21: Gaußsches Wellenpaket

(7 Punkte)

Teilchen mit einem scharfen Wert der Impuls- bzw. der Ortskoordinate sind in der Praxis nie realisiert, da wegen der Unschärferelation im ersten Fall das Teilchen im ganzen Raum delokalisiert wäre, bzw. im zweiten Fall der Impuls völlig unbestimmt wäre. Realistische Teilchen werden durch Wellenpakete beschrieben, die eine Unschärfe sowohl im Ort als auch im Impuls besitzen. Ein *Gaußsches Wellenpaket* hat im Ortsraum (in 1 Dimension) die Form

$$\psi(x) \equiv \langle x|\psi\rangle = (\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right).$$

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Formel für das Gaußintegral (a, b komplex, $\text{Re}(a) > 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 - bx) dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(\frac{b^2}{4a}\right)$$

die Fouriertransformierte $\tilde{\psi}(k) = \langle k|\psi\rangle$ des Gaußschen Wellenpaketes. Das Ergebnis ist wieder ein Gaußsches Wellenpaket. Geben Sie an, wie sich $\psi(x)$ und $\tilde{\psi}(k)$ unterscheiden.

- b) Berechnen Sie die Unschärfen des Ortes und des Impulses im Zustand $|\psi\rangle$.

Wie groß ist das Produkt $(\Delta x)(\Delta p)$?

Hinweise: Beachten Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy = 0$, wenn f eine ungerade Funktion von y ist. Die Rechnung für p hat dieselbe *Form* wie für x , so dass Sie das Ergebnis schon aus der Rechnung für x ablesen können.

Aufgabe 22: Drehoperator für Spin $\frac{1}{2}$

(7 Punkte)

Bei einem Spin- $\frac{1}{2}$ -System ist der Drehoperator für eine Drehung um eine Achse \vec{n} (mit $|\vec{n}| = 1$) um einen Winkel φ durch

$$R(\vec{n}, \varphi) = e^{-\frac{i}{\hbar} \varphi \vec{n} \cdot \vec{S}}$$

gegeben. In der z-Basis hat dieser Operator also die Matrixdarstellung $e^{-i \frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$.

- a) Zeigen Sie, dass man diese Exponentialfunktion folgendermaßen schreiben kann:

$$e^{-i \frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = \mathbb{1} \cos \frac{\varphi}{2} - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin \frac{\varphi}{2} \quad (*)$$

Hinweis: Berechnen Sie dazu zunächst $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^{2k}$ und $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^{2k+1}$, und benutzen Sie dann die Potenzreihenentwicklungen der Funktionen in (*). Sie können die explizite Matrixdarstellung von $\vec{\sigma}$ vermeiden, wenn sie die schon früher berechnete Beziehung für $\sigma_i \sigma_j$ benutzen.

- b) Leiten Sie die aus der Vorlesung bekannte Darstellung eines Vektors $|+\vec{m}\rangle$ her, indem Sie zunächst den Vektor $|+z\rangle$ um den Winkel θ um die y-Achse drehen, und dann um den Winkel φ um die z-Achse. (Zeichnungen !) Rechnen Sie in der z-Basis. Beachten Sie, dass $|+\vec{m}\rangle$ nur bis auf eine beliebige Phase bestimmt ist.

Aufgabe 23: Wiederholte Messungen (6 Punkte)

Der Hamiltonoperator \hat{H} sei zeitunabhängig und habe Eigenvektoren $\{|\nu\rangle\}$ mit nicht entarteten Eigenwerten E_ν . Die Observable \hat{A} habe Eigenvektoren $\{|m\rangle\}$ mit nicht entarteten Eigenwerten a_m .

- a) Geben Sie die Spektraldarstellungen von \hat{H} und \hat{A} sowie diejenige des Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t, t_0)$ an.
- b) Zunächst sei das betrachtete System im Zustand $|\nu\rangle$. Zum Zeitpunkt t_0 wird \hat{A} gemessen. Bestimmen Sie den Erwartungswert von \hat{A} und die Wahrscheinlichkeit, den Wert a_m zu messen.
- c) Bei der ersten Messung habe sich a_m ergeben. In welchem Zustand befindet sich das System unmittelbar nach der Messung? Geben Sie mit Hilfe der Spektraldarstellung von \hat{H} den Zustand für alle späteren Zeiten an.
- d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer weiteren Messung zu einem späteren Zeitpunkt t wieder den Wert a_m zu finden.
- e) Was ergibt sich in Teil c) speziell für $|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\nu_1\rangle + |\nu_2\rangle)$?