7. Übungsblatt zur Vorlesung Quantenmechanik, SS 2010

Abgabe: Dienstag, 11. 5. 2010, 13:00 bzw. 15:15 Uhr

Aufgabe 24: Zeitentwicklung des Gaußschen Wellenpakets *(8 Punkte)*

Wir betrachten ein spinloses Teilchen der Masse m, das sich in 1 Dimension bewegen kann.

a) Lösen Sie die eindimensionale *freie* Schrödingergleichung im Impulsraum ($i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(k,t)}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2m}k^2\tilde{\psi}(k,t)$) mit der Anfangsbedingung

$$\tilde{\psi}(k,t{=}0) \;=\; \left(\frac{\sigma_0^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp(-\frac{\sigma_0^2}{2}(k-k_0)^2) \;\; .$$

Hinweis: Das Ergebnis lautet $\tilde{\psi}(k,t) = \exp(-i\frac{\hbar}{2m}k^2t)\,\tilde{\psi}(k,t=0)$.

Die Transformation in den Ortsraum mit Hilfe des allgemeinen Gaußschen Integrals ergibt nach längerer Rechnung *(nicht durchzuführen)*

$$\psi(x,t) \;=\; \frac{1}{(\pi\sigma(t)^2)^{\frac{1}{4}}}\; \mathrm{e}^{-\frac{(x-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{2\sigma(t)^2}}\; \mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}},$$

mit $\sigma(t)^2 = \sigma_0^2\,(1+(\frac{\hbar t}{m\sigma_0^2})^2)$ und $\phi = \frac{\hbar t}{m\sigma_0^2}(\frac{(x-\frac{\hbar k_0}{m}t)^2}{\sigma(t)^2} - k_0^2\sigma_0^2) - \arctan\frac{\hbar t}{m\sigma_0^2} + 2k_0x$.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten $\tilde{\rho}(k,t) = |\tilde{\psi}(k,t)|^2$ und $\rho(x,t) = |\psi(x,t)|^2$. Sind hier beide zeitabhängig?

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\hat{x}\rangle$ des Ortsoperators und daraus die Geschwindigkeit $v = \frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt}$. Vergleichen Sie mit der Gruppengeschwindigkeit $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$.

d) Berechnen Sie $\langle\hat{p}\rangle$ (im Impulsraum) und verifizieren Sie die Gültigkeit der klassischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die Erwartungswerte: $m\frac{d\langle\hat{x}\rangle}{dt} = \langle\hat{p}\rangle$, $\frac{d\langle\hat{p}\rangle}{dt} = -\langle\frac{dV(\hat{x})}{d\hat{x}}\rangle$.

e) Berechnen Sie die Unschärfe $\Delta x(t)\Delta p(t)$.

f) Berechnen Sie die Breite $\Delta x(t)$ des Gaußschen Paketes. Bestimmen Sie für

   (i) den offiziellen WM Ball 2010 "Jabulani", Größe 5, mit $m = 0.44kg$ und $\sigma_0 = 22cm$

   (ii) ein Bakterium (Wasserwürfel mit Seitenlänge $1\mu m$ und $\sigma_0 = 10^{-8}m$)

   (iii) ein Elektron mit $\sigma_0 = 10^{-10}$m,

   nach welcher Zeit sich Δx verdoppelt hat und wie groß Δx nach 1 Sekunde ist.

Hinweise: In Aufgabe c) und d) können Sie die Ergebnisse im Wesentlichen schon aus der *Form* der x- bzw. p-Abhängigkeit von ψ ablesen! Die Wellenfunktion $\psi(x,t)$ ist auf Eins normiert. Die Ergebnisse aus Aufgabe 21 können für den Aufgabenteil e) herangezogen werden.

(bitte wenden)

Aufgabe 25: Attraktives δ-Potential *(6 Punkte)*

In einer Dimension befinde sich ein Teilchen in dem Potential

$$V(x) = -\gamma \frac{\hbar^2}{2m}\,\delta(x) \quad , \quad \gamma > 0 \;.$$

a) Finden Sie durch Lösen der eindimensionalen Schrödingergleichung die normierten Wellenfunktionen $\Psi(x,t)$ für alle gebundenen (d.h. normierbaren) Zustände des Teilchens, sowie ihre Energien.

b) Berechnen Sie für diese Zustände die Punkte x_0 so, dass die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[-x_0, x_0]$ zu finden, gleich $1/2$ ist.

Hinweis: Die Ableitung $\psi'(x)$ ist hier nicht stetig, sondern macht an der Stelle $x = 0$ einen Sprung, dessen Größe aus der Vorlesung bekannt ist.

Aufgabe 26: Kommutatoren von Funktionen des Impulsoperators

(6 Punkte)

(a) Gegeben sei eine Funktion $f(p)$, für die eine Reihenentwicklung $f(\hat{P}) = \sum_\nu a_\nu \hat{P}^\nu$ existieren soll. Zeigen Sie, dass aus der Vertauschungsrelation für Orts- und Impulsoperator $[\hat{Q}, \hat{P}] = \mathrm{i}\hbar$ die Beziehung

$$[\,\hat{Q}\,,\, f(\hat{P})\,] \;=\; \mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial f(\hat{P})}{\partial \hat{P}} \;:=\; \mathrm{i}\hbar\,\left.\frac{\partial f(p)}{\partial p}\right|_{p=\hat{P}}$$

folgt. *Anleitung:* Da die Reihenentwicklung eine Linearkombination ist, brauchen Sie im wesentlichen nur $\hat{P}^\nu$ zu behandeln. Benutzen Sie die Vertauschungsrelation, um den Operator $\hat{Q}$ ganz nach rechts zu schieben.

(b) Gegeben sei nun eine analytische Funktion $g(\vec{p}, \vec{x})$. Begründen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a), dass dann

$$[\,\hat{Q}_\alpha\,,\, g(\vec{\hat{P}}, \vec{\hat{Q}})\,] \;=\; \mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial g(\vec{\hat{P}}, \vec{\hat{Q}})}{\partial \hat{P}_\alpha}$$

gilt. *Anleitung:* Sie können g in eine sechsfache Potenzreihe in $\hat{P}_\beta$ und $\hat{Q}_\gamma$ entwickeln. Bei festem α ist aber nur die Potenz von $\hat{P}_\alpha$ relevant. Alles Übrige kann zu einem operatorwertigen Koeffizienten zusammengefasst werden, der sich gegenüber $\hat{Q}_\alpha$ wie eine Zahl verhält.