Übungsbeispiele

Abbildungen, Mathematische Logik

1. **Beispiel** [825 105]: Es seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = 2x^2 - 10x + 7$$

und

$$g(x) = 2 - 3x.$$

   (a) Bestimmen Sie g^{-1}, $f \circ f$ und $g \circ g^{-1}$.

   (b) Welche Eigenschaften (surjektiv, injektiv, bijektiv) gelten jeweils für die Abbildungen f, g, g^{-1}, $f \circ f$ und $g \circ g^{-1}$.

2. **Beispiel** [000 000]: Stellen Sie die folgenden Abbildungen $f: A \to B$, $g: B \to A$, $h: C \to B$, $r: B \to C$ und $s: A \to C$ in einem Diagramm dar. Welche der folgenden Verknüpfungen $g \circ f$, $r \circ f$, $g \circ h$, $h \circ f$, $s \circ f$ und $h \circ s \circ g$ bilden eine zusammengesetze Abbildung?

3. **Beispiel** [000 000]: Es seien $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 + 3x + 1$ und $g(x) = 2x - 3$. Bestimmen Sie die zusammengesetzte Abbildung $f \circ g$.

4. **Beispiel** [914 117]: Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^3 - 3x^2.$$

Ist diese Funktion surjektiv? Bestimmen Sie die maximalen Teilintervalle der x-Achse auf denen die gegebene Funktion injektiv ist: $(-\infty, ?]$, $[?, ?]$ und $[?, ?)$.

5. **Beispiel** [927 105]: Deuten Sie das Bild der (t,u)-Ebene bezüglich der Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $F(t,u) = (\cos t, \sin t, u)$ geometrisch. Ist F surjektiv? Wie müßte man den $\mathbb{R}^2$ einschränken damit die Abbildung injektiv wird?

6. **Beispiel** [925 101]: Sei F die zusammengesetzte Abbildung endlich vieler Abbildungen f_i:

$$F = f_n f_{n-1} \dots f_1$$

Zeigen Sie, daß die Injektivität von f_1 eine notwendige Bedingung für die Injektivität von F ist.

7. **Beispiel** [928 104]: Es sei

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & C \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm und α eine bijektive Abbildung. Beweisen Sie, f ist genau dann bijektiv , wenn g bijektiv ist.

8. **Beispiel** [928 104]: Zeigen Sie, daß die Subjunktionen

$$v \to s$$

und

$$(\neg s \wedge v) \to \neg v$$

logisch äquivalent sind.

9. **Beispiel** [000 000]: Ist $[(p \to q) \wedge p] \to q$ oder $[(p \to q) \wedge q] \to p$ ein richtiges Beweisschema?

Übungsbeispiele

Gruppe, Ring, Körper

1. **Beispiel** [000 000]: Prüfen Sie, ob in den Mengen $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ und $B = \{1, -1, i, -i\}$ die Gruppenaxiome bezüglich der Multiplikation erfüllt sind.

2. **Beispiel** [717 017]: Verifizieren Sie in der Menge $M = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ bezüglich der Verknüpfung $(x, y) \circ (\bar{x}, \bar{y}) = (x + \bar{x},\ y\bar{y})$ die Gruppenaxiome. Geben Sie das neutrale Element und das zu einem gegeben Element inverse Element an.

3. **Beispiel** [000 000]: In $\mathbb{R}$ sei durch $x \star y = ax + by$ eine Verknüpfung definiert. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist $(\mathbb{R}, \star)$ eine Gruppe?

4. **Beispiel** [702 039]: Bildet die Menge der Funktionen $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ mit

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = x, & f_2(x) = \frac{1}{x}, & f_3(x) = 1 - x, \\ f_4(x) = \frac{x}{-1+x}, & f_5(x) = \frac{1}{1-x}, & f_6(x) = 1 - \frac{1}{x} \end{array}$$

und $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ bezüglich der Zusammensetzung der Funktionen aus F eine Guppe? Es ist z.B.:

$$(f_2 f_3)(x) = f_2(f_3(x)) = \frac{1}{1-x} = f_5(x).$$

5. **Beispiel** [915 125]: Es seien U und W kommutative Gruppen. Ferner sei

$$V = \{(u, w) \mid u \in U,\ w \in W\}.$$

Bildet V mit

$$(u, w) \circ (u', w') = (u + u',\ w * w') \qquad u, u' \in U,\ \ w, w' \in W$$

eine kommutative Gruppe?

6. **Beispiel** [7?? 107]: Prüfen Sie, ob die Menge $S = \{a, b\}$ bezüglich der gegebenen Additions- und Multiplikationsverknüpfung einen kommutativen Ring bildet.

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\odot$	a	b
a	a	a
b	a	b

7. **Beispiel** [707 027]: Bildet die Menge $S = \{x + y\sqrt[3]{3} + z\sqrt[3]{9} \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$ bezüglich der natürlichen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring?

8. **Beispiel** [921 037]: Es sei $(G, +)$ eine kommutative Gruppe. Ist mit der Multiplikationsverknüpfung

$$a \cdot b = 0 \quad \text{für alle} \quad a, b \in G$$

das Tripel $(G, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring?

9. **Beispiel** [000 000]: Zeigen Sie, daß der $\mathbb{R}^2$ zusammen mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (x, y) + (a, b) &= (x + a, y + b) \\ (x, y) \cdot (a, b) &= (xa - yb, xb + ya) \end{aligned}$$

einen Körper bildet.

Übungsbeispiele

Vektorraum

1. **Beispiel** [000 000]: Prüfen Sie, ob für das Tripel $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ bezüglich der Verknüpfungen

$$\begin{aligned} (a,b) \oplus (c,d) &= (a+c, b+d) \\ k \odot (a,b) &= (k^2 a, k^2 b) \end{aligned}$$

mit $k \in \mathbb{R}$ die Vektorraumaxiome erfüllt sind.

2. **Beispiel** [827 100]: Auf der Menge $\mathbb{R}^2$ seien folgende Verknüpfungen definiert:

$$\begin{aligned} (a,b) \otimes (c,d) &= (ac, bd), \quad (a,b), (c,d) \in \mathbb{R}^2, \\ k \odot (a,b) &= (ka, kb), \quad k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bildet $(\mathbb{R}^2, \otimes, \odot)$ einen reellen Vektorraum? Zeigen Sie detailliert, welche Axiome erfüllt und welche eventuell verletzt sind.

3. **Beispiel** [710 126]: Beweisen Sie, daß

$$l_2 = \{f \mid f = (x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots),\ 1 \leq i \leq \infty,\ x_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\},$$

der Raum der unendlichen Zahlenfolgen bezüglich der Additionsverknüpfung

$$f + g = (x_1 + y_1, \ldots, x_i + y_i, \ldots), \quad f, g \in l_2$$

und der S-Multiplikation

$$a \cdot f = (ax_1, \ldots, ax_i, \ldots), \quad a \in \mathbb{R}, \quad f \in l_2$$

einen reellen Vektorraum bildet. Geben Sie das neutrale Element und das zu einem gegebenen Element inverse Element an.

Hinweis: Es gilt:

$$|x_i + y_i|^2 \leq (|x_i| + |y_i|)^2 \leq (|x_i| + |y_i|)^2 + (|x_i| - |y_i|)^2 = 2|x_i|^2 + 2|y_i|^2.$$

4. **Beispiel** [000 000]: Bildet die Menge der Funktionen

$$F = \{c_1 \exp(x) + c_2 \exp(3x) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

bezüglich der natürlichen Addition und S-Multiplikation einen rellen Vektorraum?

5. **Beispiel** [000 000]: Es sei $x \neq 0$ ein Element eines Vektorraumes über $\mathbb{Q}$ und

$$A = \{\lambda \cdot x \mid \lambda \in \mathbb{Q}\} \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{B} = \{\mathrm{n} \cdot \mathrm{x} \mid \mathrm{n} \in \mathbb{Z}\}.$$

Nun führen wir in A und in B eine Vektoraddition durch

$$\lambda_1 \cdot x \oplus \lambda_2 \cdot x = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{n}_1 \cdot \mathrm{x} \oplus \mathrm{n}_2 \cdot \mathrm{x} = (\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2) \cdot \mathrm{x}$$

ein und definieren weiters eine S-Multiplikation in der Form

$$k \odot (\lambda \cdot x) = (k\lambda) \cdot x \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{k} \odot (\mathrm{n} \cdot \mathrm{x}) = (\mathrm{kn}) \cdot \mathrm{x}.$$

Bilden A bzw. B Vektorräume über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen?

6. **Beispiel** [925 106]: Bildet die Menge aller Funktionen f_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, definiert durch

$$\begin{aligned} f_\alpha :\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \mathrm{e}^{\alpha x}, \end{aligned}$$

bezüglich der innereren Verknüpfung

$$\mathrm{e}^{\alpha x} \mathrm{e}^{\beta x} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)x}$$

und der S-Multiplikation

$$k \cdot f_\alpha = f_{\alpha k},\ k \in \mathbb{R}$$

einen reellen Vektorraum? Prüfen Sie alle Axiome.

7. **Beispiel** [713 126]: Eine lineare Form in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Funktion, die durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_x$$

mit reellen Koeffizienten α_k beschrieben werden kann. Zeigen Sie, daß die Menge aller linearen Formen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ bezüglich der Addition,

$$(f+g)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k + \beta_k) x_k,$$

und Multiplikation mit reellen Zahlen k,

$$(kf)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} k \alpha_k x_k,$$

einen reellen Vektorraum bildet. Geben Sie das neutrale Element und das zu einem gegebenen Element inverse Element an.

Übungsbeispiele

Untervektorraum, Linearkombination, Lineare Hülle

1. **Beispiel** [000 000]: Prüfen Sie, ob die Mengen

   a) $\{(r, 0, 2r) \mid r \in \mathbb{R}\}$
   b) $\{(2, -r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$
   c) $\{(r+s, r, r-s) \mid r, s \in \mathbb{R}\}$
   d) $\{(r^2, 2r, 3r) \mid r \in \mathbb{R}\}$

   mit der Addition
   $$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$
   und der S-Multiplikation
   $$r \cdot (a_1, a_2, a_3) = (ra_1, ra_2, ra_3)$$
   einen reellen Vektorraum bilden.

2. **Beispiel** [000 000]: Bildet die Teilmenge
   $$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0 \vee y = 0\}$$
   eine Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?

3. **Beispiel** [000 000]: Ist $(2, 4, 1, 2)$ eine Linearkombination der Vektoren $(1, 2, 2, 1)$, $(-1, 1, -2, -1)$ und (-1,3,-1,1) des $\mathbb{R}^4$?

4. **Beispiel** [729 109]: Ist $\frac{1}{3}(x-1)(x+1) + 3(2x^2 - 2)$ die einzige Möglichkeit, das Polynom $\frac{19}{3}x^2 - \frac{19}{3}$ aus $(x-1)(x+1)$ und $(2x^2 - 2)$ linear zu kombinieren?

5. **Beispiel** [908 116]: Sind die Vektorräume der Polynome

   a) $\left\{ax + bx^2 + cx^3 \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$
   b) $\left\{cx^3 + bx^2 + ax + a - c \,|\, a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$

   die lineare Hülle der Polynome $(x + 1, x^2, x^3 - 1)$?

6. **Beispiel** [823 107]: Ist der Untervektorraum
   $$V = \{(a, b, c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R},\ a + b + c + d = 0\}$$
   die lineare Hülle der Vektoren $(1, 0, 0, -1)$ und $(1, 0, -1, 0)$?

Übungsbeispiele

Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension

1. **Beispiel** [725 117]: Es seien u, v, und w Elemente eines reellen Vektorraumes und $(u+v, u-v, u-2v+w)$ linear unabhängig. Ist dann auch (u, v, w) linear unabhängig?

2. **Beispiel** [830 104]: Es sei $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ ein linear unabhängiges m-tupel von Vektoren. Angenommen,
   $$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_mv_m$$
   sei eine Linearkombination der v_i und a_i seien Skalare. Zeigen Sie, daß diese Darstellung von u eindeutig ist.

3. **Beispiel** [000 000]: Bilden die Vektoren $(1, 2, 4)$, $(-4, 1, -1)$ und $(2, 1, 3)$ eine Basis des $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$?

4. **Beispiel** [811 113]: Zeigen Sie, daß
   $$P = \{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$
   ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist. Bestimmen Sie eine Basis von P. Wie groß ist die Dimension von P?

5. **Beispiel** [830 104]: Es sei V der Vektorraum der Polynome in t vom Grad $\leq n$. Bilden die Vektoren

   a) $(1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3, \ldots, 1+t+t^2+\ldots+t^{n-1}+t^n)$
   b) $(1+t, t+t^2, t^2+t^3, \ldots, t^{n-2}+t^{n-1}, t^{n-1}+t^n)$

   eine Basis von V?

6. **Beispiel** [910 115]: Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension der Summe der Untervektorräume $U = U_1 + U_2$ mit
   $$\begin{aligned} U_1 &= \{(0, a, b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}\,, \\ U_2 &= \{(0, 0, c, d) \mid c, d \in \mathbb{R}\}\,. \end{aligned}$$

7. **Beispiel** [829 102]: Es sei (v_1, v_2, v_3, v_4) linear unabhängig. Wie groß ist $\dim(L(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \cap L(v_1, v_2, v_3))$?

8. **Beispiel** [829 102]: Es seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V. Beweisen Sie, ist $\dim U_1 = \dim V$, so ist $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_2$.

Lösungen

Abbildungen, Mathematische Logik

1. **Beispiel:**

   (a) $g^{-1}(x) = \frac{2-x}{3}$, $(f \circ f)(x) = 8x^4 - 80x^3 + 236x^2 - 180x + 35$, $(g \circ g^{-1}(x) = x$.

   (b)

	injektiv	surjektiv	bijektiv
f			
g	x	x	x
g^{-1}	x	x	x
$f \circ f$			
$g \circ g^{-1}$	x	x	x

2. **Beispiel:** Die Verknüpfungen $g \circ f$, $r \circ f$, $g \circ h$ und $h \circ s \circ g$ stellen im vorliegenden Diagramm eine zusammengesetzte Abbildung dar.

3. **Beispiel:** Die zusammengesetzte Abbildung lautet:

$$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1.$$

4. **Beispiel:** Die Funktion ist surjektiv. Die maximalen Teilintervalle der x-Achse auf denen die Funktion injektiv ist, sind: $(-\infty, 0]$, $[0, 2]$, $[2, \infty)$.

5. **Beispiel:** Die Funktion F ist nicht surjektiv und bildet die t, u–Ebene auf eine Zylinderfläche im $\mathbb{R}^3$ ab. Der $\mathbb{R}^2$ müßte auf den "Streifen", gegeben durch das kartesische Produkt $[n\pi, (n+2)\pi) \times \mathbb{R}$, mit $n \in \mathbb{Z}$ reduziert werden, dann wäre F eingeschränkt auf einen solchen Streifen jeweils injektiv.

6. **Beispiel:** Es ist

$$F \textit{ ist injektiv} \rightarrow f \textit{ ist injektiv}$$

   zu zeigen:

$$\begin{aligned} \exists\, x \neq x' : \quad f_1(x) &= f_1(x') \\ &\vdots \\ \exists\, x \neq x' : \quad F(x) &= F(x'). \end{aligned}$$

7. **Beispiel:** Infolge der Symmetrie des kommutativen Diagramms ist es hinreichend zu zeigen, daß

$$\begin{aligned} f \textit{ ist injektiv} &\rightarrow g \textit{ ist injektiv}, \\ f \textit{ ist surjektiv} &\rightarrow g \textit{ ist surjektiv}. \end{aligned}$$

   Injektivität von g:

$$\exists\, c \neq c' : \quad g(c) = g(c');$$

   da α bijektiv ist, gilt $c = \alpha^{-1}(a)$ und $c' = \alpha^{-1}(a')$ mit $a \neq a'$ und somit

$$\begin{aligned} \exists\, a \neq a' : \quad g(\alpha^{-1}(a)) &= g(\alpha^{-1}(a')) \\ \exists\, a \neq a' : \quad (g\alpha^{-1})(a) &= (g\alpha^{-1})(a') \\ \exists\, a \neq a' : \quad f(a) &= f(a'). \end{aligned}$$

   Surjektivität von g:

$$\begin{aligned} \forall\, b \in B\ \exists\, a \in A : \quad b &= f(a), \quad \forall\, a \in A\ \exists\, c \in C : \quad a = \alpha(c) \\ &\downarrow \\ \forall\, b \in B\ \exists\, c \in C : \quad b &= f(\alpha(c)) \\ \forall\, b \in B\ \exists\, c \in C : \quad b &= (f\alpha)(c) \\ \forall\, b \in B\ \exists\, c \in C : \quad b &= g(c). \end{aligned}$$

8. **Beispiel:**

v	s	¬ v	¬ s	¬ s ∧ v	v → s	¬ s ∧ v → ¬ v
w	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	w	f	f
f	w	w	f	f	w	w
f	f	w	w	f	w	w

9. **Beispiel:** Ein richtiges Beweisschema liegt dann vor, wenn die Subjunktion, die dem Beweis zugrunde liegt, eine Tautologie ist. Stellen Sie die entsprechenden Wahrheitstafeln auf und prüfen Sie, ob die Subjunktion stets eine wahre Aussage ist. Das erste Beweisschema wird sich dabei als richtig erweisen und das zweite als falsch:

p	q	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$
w	w	w	w
w	f	w	w
f	w	w	f
f	f	w	w

Lösungen

Gruppe, Ring, Körper

1. **Beispiel:** Die Menge B bildet bezüglich der Multiplikation eine Gruppe, A jedoch nicht.

2. **Beispiel:** Das neutrale Element ist $(0,1)$. Das Element (x,y) ist zu $(-x, \frac{1}{y})$ invers.

3. **Beispiel:** Für $a = b = 1$ ist $(\mathsf{IR}, \star)$ eine Gruppe.

4. **Beispiel:** Stellen Sie die zugehörige Verknüpfungstafel auf, indem Sie alle (falls Ihnen nichts Besseres einfällt, um die Ihnen geschenkte Zeit zu nützen!) Kombinationen zusammengesetzter Abbildungen berechnen:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_1	f_5	f_6	f_3	f_4
f_3	f_3	f_6	f_1	f_5	f_4	f_2
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_4	f_2	f_3	f_6	f_1
f_6	f_6	f_3	f_4	f_2	f_1	f_5

Es liegt offensichtlich ein VG vor. Daß es sich um ein assoziatives VG handelt, folgt aus der Gültigkeit des AG für zusammengesetzte Abbildungen. Das NE ist f_1. Aus der Tabelle erkennt man weiters unmittelbar: Die Funktionen f_1 bis f_4 sind jeweils zu sich selbst invers; f_5 ist zu f_6 und folglich f_6 zu f_5 invers. Somit ist F eine Gruppe.

5. **Beispiel:** Die Gruppeneigenschaft von V ist unmittelbar auf die Gruppeneigenschaften von U und W zurückfürbar. Das AG kann beispielsweise folgendermaßen verifiziert werden:

$$\begin{aligned}((u,w)\circ(u',w'))\circ(u",w") &= (u,w)\circ((u',w')\circ(u",w"))\\ (u+u',w*w')\circ(u",w") &= (u,w)\circ(u'+u",w'*w")\\ ((u+u')+u",(w*w')*w") &= (u+(u'+u"),w*(w'*w"))\end{aligned}$$

Die Identitä der beiden Gleichungsseiten ist aufgrund der Gültigkeit der AG in U und W gewährleistet. Seien u_0 und w_0 die NE in U bzw. W, dann ist das NE in V durch (u_0, w_0) gegeben. Seien $-u$ und $-w$ die IE zu u bzw. w, dann ist $(-u,-w)$ zu (u,w) invers.

6. **Beispiel:** Die Verknüpfungstafeln zeigen, daß bezüglich $\oplus$ und $\odot$ ein VG vorliegt. Da beide Tafeln symmetrisch zur Diagonale durch die Verknüpfungssymbole sind, sind beiden Verknüpfungen kommutativ. Die Assoziativität der Verknüpfungen ist konkret für alle Kombinationsmöglichkeiten der vorhandenen Elemente zu prüfen, wobei die Gültigkeit des KG den Aufwand wesentlich reduziert. Da nur zwei verschiedene Elemente vorliegen, treten in den Beziehungen zunächst mindestens zwei idente Elemente auf. Die selben Überlegungen gelten auch für die Verifikation des DG. Bezüglich $\oplus$ ist a das NE Element; die Elemente a und b sind jeweils zu sich selbst invers. Also hat S die Struktur eine kommutativen Rings.

7. **Beispiel:** Bezüglich der Addition verhält sich $0+0\sqrt[3]{3}+0\sqrt[3]{9}$ neutral. Das Element $-x-y\sqrt[3]{3}-z\sqrt[3]{9}$ ist zu $x+y\sqrt[3]{3}+z\sqrt[3]{9}$ invers. Die Abgeschlossenheit bezüglich der Multiplikation prüft man so:

$$\begin{aligned}(x+y\sqrt[3]{3}+z\sqrt[3]{9})(\bar{x}+\bar{y}\sqrt[3]{3}+\bar{z}\sqrt[3]{9}) &= x\bar{x}+x\bar{y}\sqrt[3]{3}+x\bar{z}\sqrt[3]{9}\\ &\quad +y\bar{x}\sqrt[3]{3}+y\bar{y}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{3}+y\bar{z}\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{9}\\ &\quad +z\bar{x}\sqrt[3]{9}+z\bar{y}\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{3}+z\bar{z}\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{9}\\ &= x\bar{x}+x\bar{y}\sqrt[3]{3}+x\bar{z}\sqrt[3]{9}\\ &\quad +y\bar{x}\sqrt[3]{3}+y\bar{y}\sqrt[3]{9}+y\bar{z}3\\ &\quad +z\bar{x}\sqrt[3]{9}+z\bar{y}3+z\bar{z}3\sqrt[3]{3}\\ =x\bar{x}+3y\bar{z}+3z\bar{y}+(x\bar{y}+y\bar{x}+3z\bar{z})\sqrt[3]{3}&+(x\bar{z}+y\bar{y}+z\bar{x})\sqrt[3]{9}\end{aligned}$$

Der gewonnene Ausdruck ist Element von S. Die KG und AG sowie das DG gilt in trivialer Weise aufgrund der Gültigkeit der entsprechenden Gesetze in IR. S ist somit ein kommutativer Ring.

8. **Beispiel:** Das Tripel $(G,+,\cdot)$ ist ein kommutativer Ring.

9. **Beispiel:** Eine Geduldprobe! Vergessen Sie bitte nicht, dass hier auch das Distributivgesetz zu verifizieren ist - falls sie inzwischen nicht schon aus Langeweile das Handtuch geworfen haben. Um welchen Körper es sich hier handelt, sollten Sie aber schon herausgefunden haben!

Lösungen

Vektorraum

1. **Beispiel:** Das Paar $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ bildet eine kommutative Gruppe, da mit $\oplus$ die natürliche Additionsverknüpfung gemeint ist. Im Detail zu prüfen sind hier nur jene Axiome, in die die S-Multiplikation (die hier offensichtlich abgeschlossen ist) eingeht:

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\odot(a,b) &\stackrel{?}{=} \lambda\odot(a,b)\oplus\mu(a,b) \qquad (1)\\
((\lambda+\mu)^2a,(\lambda+\mu)^2b) &\stackrel{?}{=} (\lambda^2a,\lambda^2b)\oplus(\mu^2a,\mu^2b)\\
((\lambda+\mu)^2a,(\lambda+\mu)^2b) &\neq ((\lambda^2+\mu^2)a,(\lambda^2+\mu^2)b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda\odot[(a,b)+(c,d)] &\stackrel{?}{=} \lambda\odot(a,b)\oplus\lambda\odot(c,d) \qquad (2)\\
\lambda\odot(a+c,b+d) &\stackrel{?}{=} (\lambda^2a,\lambda^2b)\oplus(\lambda^2c,\lambda^2d)\\
(\lambda^2(a+c),\lambda^2(b+d) &= (\lambda^2(a+c),\lambda^2(b+d))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda\odot(\mu\odot(a,b)) &\stackrel{?}{=} (\lambda\mu)\odot(a,b) \qquad (3)\\
\lambda\odot(\mu^2a,\mu^2b) &\stackrel{?}{=} ((\lambda\mu)^2a,(\lambda\mu)^2b)\\
(\lambda^2(\mu^2a),\lambda^2(\mu^2b)) &= ((\lambda\mu)^2a,(\lambda\mu)^2b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1\odot(a,b) &\stackrel{?}{=} (a,b) \qquad (4)\\
(1^2a,1^2b) &= (a,b)
\end{aligned}$$

Nur das Axiom (1) ist nicht erfüllt.

2. **Beispiel:** Das NE bezüglich der inneren Verknüpfung $\otimes$ lautet $(1,1)$. Da nur für $a\neq 0\wedge b\neq 0$ zu (a,b) das IE $(\frac{1}{a},\frac{1}{b})$ existiert, bildet $(\mathbb{R}^2,\otimes)$ keine kommutative Gruppe (alle übrigen Gruppenaxiome wären erfüllt). Bezüglich der S-Multiplikation sind die beiden Distributivgesetze nicht erfüllt. Z.B. liefert die Prüfung des ersten Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\odot(a,b) &\stackrel{?}{=} \lambda\odot(a,b)\otimes\mu\odot(a,b)\\
((\lambda+\mu)a,(\lambda+\mu)b)) &\stackrel{?}{=} (\lambda a,\lambda b)\otimes(\mu a,\mu b)\\
((\lambda+\mu)a,(\lambda+\mu)b)) &\neq ((\lambda a)(\mu a),(\lambda b)(\mu b)).
\end{aligned}$$

Somit ist $(R^2,\otimes,\odot)$ kein reeller Vektorraum.

3. **Beispiel:** Die Additionsverknüpfung auf l_2 ist wegen

$$\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left[2|x_i|^2+2|y_i|^2\right] = 2\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2+2\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^2<\infty$$

abgeschlossen. Dies gilt auch für die äußere Verknüpfung:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|ax_i|^2 = a^2\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2<\infty.$$

Der Nullvektor lautet $n=(0,0,\ldots,0\ldots)$. Der inverse Vektor zu $f=(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots)$ ist durch $f=(-x_1,-x_2,\ldots,-x_i,\ldots)$ gegeben. Leicht verifiziert man, daß auch alle übrigen Axiome erfüllt sind, wie z.B. das zweite Distributivgesetz:

$$\begin{aligned}
r\cdot[(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots)+(y_1,y_2,\ldots,y_i,\ldots)] &= r\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots)\\
&\quad +r\cdot(y_1,y_2,\ldots,y_i,\ldots)\\
r\cdot(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_i+y_i,\ldots) &= (rx_1,rx_2,\ldots,rx_i,\ldots)\\
&\quad +(ry_1,ry_2,\ldots,ry_i,\ldots)\\
(r(x_1+y_1),r(x_2+y_2),\ldots,r(x_i+y_i),\cdots)&\\
&= (rx_1+ry_1,rx_2+ry_2,\ldots,rx_i+ry_1,\ldots).
\end{aligned}$$

Also bildet der Raum l_2 einen reellen Vektorraum.

4. **Beispiel:** Man prüft zunächst ob F bezüglich der natürlichen Addition ein Verknüpfungsgebilde (VG) ist:

$$(c_1\exp(x)+c_2\exp(3x))\oplus(\hat{c}_1\exp(x)+\hat{c}_2\exp(3x)) = (c_1+\hat{c}_1)\exp(x)+(c_2+\hat{c}_2)\exp(3x).$$

Wegen $c_1+\hat{c}_1\in\mathbb{R}$ und $c_2+\hat{c}_2\in\mathbb{R}$ ist stets die Summe zweier Elemente aus F wieder eine Element in F. Offenbar ist dieses VG assoziativ und kommutativ. Das NE ist durch $c_1=c_2=0$ definiert. Das IE zu $c_1\exp(x)+c_2\exp(3x)$ ist durch $-c_1\exp(x)-c_2\exp(3x)$ gegeben. Somit ist F bezüglich der natürlichen Addition eine kommutative Gruppe.

Sei $\lambda\in\mathbb{R}$, dann ist gemäß der natürlichen S-Multiplikation

$$\lambda\odot(c_1\exp(x)+c_2\exp(3x)) = \lambda c_1\exp(x)+\lambda c_2\exp(3x)$$

und wegen $\lambda c_1,\lambda c_2\in\mathbb{R}$ auch die Skalarmultiplikation abgeschlossen.

Die weiteren Vektorraumaxiome prüft man, wie z.B. das erste Distributivgesetz, folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\odot(c_1\exp(x)+c_2\exp(3x)) &\stackrel{?}{=} \lambda\odot(c_1\exp(x)+c_2\exp(3x))\\
&\quad\oplus\ \mu\odot(c_1\exp(x)+c_2\exp(3x))\\
(\lambda+\mu)c_1\exp(x)+(\lambda+\mu)c_2\exp(3x) &\stackrel{?}{=} (\lambda c_1\exp(x)+\lambda c_2\exp(3x))\\
&\quad\oplus\ (\mu c_1\exp(x)+\mu c_2\exp(3x))\\
(\lambda+\mu)c_1\exp(x)+(\lambda+\mu)c_2\exp(3x) &= (\lambda c_1+\mu c_1)\exp(x)+(\lambda c_2+\mu c_2)\exp(3x).
\end{aligned}$$

5. **Beispiel:** Menge A: Das Paar $(A,\oplus)$ ist ein Verknüpfungsgebilde, da gemäß

$$\lambda_1\cdot x\ \oplus\ \lambda_2\cdot x = (\lambda_1+\lambda_2)\cdot x$$

und wegen $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{Q}$ die Verknüpfung in dieser Menge abgeschlossen ist. Offensichtlich ist diese Verknüpfung auch assoziativ und kommutativ. Das NE ist $0 \cdot x$ und das IE zu $\lambda \cdot x$ lautet $(-\lambda) \cdot x$. Also ist $(A, \oplus)$ eine kommutative Gruppe. Die S-Multiplikation ist abgeschlossen. Denn sei $k \in \mathbb{Q}$, dann ist

$$k \odot (\lambda \cdot x) = (k\lambda) \cdot x$$

und da $k\lambda \in \mathbb{Q}$, ist auch $(k\lambda) \cdot x$ wiederum in A enthalten. Auch die vier weiteren Vektorraumaxiome sind erfüllt. Z.B. läßt sich das zweite Distributivgesetz folgendermaßen verifizieren:

$$\begin{aligned} \lambda_3 \odot (\lambda_1 \cdot x \oplus \lambda_2 \cdot x) &\stackrel{?}{=} \lambda_3 \odot (\lambda_1 \cdot x) \oplus \lambda_3 \odot (\lambda_2 \cdot x) \\ \lambda_3 \odot ((\lambda_1 + \lambda_2) \cdot x) &\stackrel{?}{=} (\lambda_3\lambda_1) \cdot x \oplus (\lambda_3\lambda_2) \cdot x \\ (\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2)) \cdot x &= (\lambda_3\lambda_1 + \lambda_3\lambda_2) \cdot x \end{aligned}$$

Die Gültigkeit dieses Axioms läßt sich somit auf die Gültigkeit des Distributivgesetzes in $\mathbb{Q}$ zurückführen.

Menge B: Auch das Paar $(B, \oplus)$ bildet eine kommutative Gruppe. Jedoch ist die S-Multiplikation nicht abgeschlossen. Denn sei $k \in \mathbb{Q}$ dann ist

$$k \odot (n \cdot x) = (kn) \cdot x$$

und da $kn \notin \mathbb{Z}$, ist $(kn) \cdot x$ nicht in B enthalten. Die Menge B bildet keinen Vektorraum über $\mathbb{Q}$.

6. **Beispiel:** Die Menge der Funktionen f_α bildet bezüglich der gegebenen Verknüpfung ein VG, denn

$$(f_\alpha \oplus f_\beta)(x) := \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{\beta x} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)x} = f_{\alpha+\beta}(x)$$

und $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$. Somit gilt auch

$$f_\alpha \oplus f_\beta := f_{\alpha+\beta}\,.$$

Aufgrund dieser Erkenntnis ist die Assoziativität und die Kommutativität der gegebenen Verknüpfung unmittelbar evident. Das NE lautet $f_0(x) = \mathrm{e}^{0x}$ und f_α ist zu $f_{-\alpha}$ invers. Also bilden diese Funktionen bezüglich der gegebenen Verknüpfung eine kommutative Gruppe.

Die S-Multiplikation ist abgeschlossen, da

$$k \cdot f_\alpha := f_{\alpha k}$$

und $\alpha k \in \mathbb{R}$ ist.

Auch die vier weiteren Vektorraumaxiome sind erfüllt. Das zweite Distributivgesetz prüft man beispielsweise folgendermaßen:

$$\begin{aligned} k \cdot (f_\alpha \oplus f_\beta) &\stackrel{?}{=} k \cdot f_\alpha \oplus k \cdot f_\beta \\ k \cdot f_{\alpha+\beta} &\stackrel{?}{=} f_{\alpha k} \oplus f_{\beta k} \\ f_{k(\alpha+\beta)} &= f_{\alpha k+\beta k}. \end{aligned}$$

Somit bilden die Funktionen f_α bezüglich der gegebenen Verknüpfungen einen reellen Vektorraum.

7. **Beispiel:** Zur Demonstration der Vorgangsweise wird die Gültigkeit des Assoziativgesetzes gezeigt:

$$\begin{aligned} (f+g)+h &= f+(g+h) \\ ((f+g)+h)(x_1,\ldots,x_n) &= (f+(g+h))(x_1,\ldots,x_n) \end{aligned}$$

Sei $(f+g)(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^n (\alpha_k+\beta_k)x_k = \sum_{k=1}^n \mu_k x_k$, mit $\mu_k = \alpha_k + \beta_k$ und weiters $(g+h)(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k=1}^n (\beta_k+\gamma_k)x_k = \sum_{k=1}^n \nu_k x_k$, mit $\nu_k = \beta_k + \gamma_k$, dann ergibt der nächste Umformungsschritt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\mu_k+\gamma_k)x_k &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k+\nu_k)x_k \\ \sum_{k=1}^n ((\alpha_k+\beta_k)+\gamma_k)x_k &= \sum_{k=1}^n (\alpha_k+(\beta_k+\gamma_k))x_k, \end{aligned}$$

womit die Assoziativität der Addition linearer Formen auf die Gültigkeit des Assoziativgesetzes für reelle Zahlen zurückgeführt wurde. Das NE ist gegeben durch $e(x_1,\ldots,x_n) = 0$. Das IE zur linearen Form $f(x_1,\ldots,x_n) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$ lautet: $f'(x_1,\ldots,x_n) = -\alpha_1 x_1 - \ldots - \alpha_n x_n$.

Lösungen

Untervektorraum, Linearkombination, Lineare Hülle

1. **Beispiel:** Stets handelt es sich hier um Teilmengen des $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Offensichlich ist keine der Teilmengen leer. Explizit zu prüfen ist jeweils die Abgeschlossenheit bezüglich der beiden Verknüpfungen:
   a) Z.B.: (r,0,2r)+(s,0,2s) = (r+s,0,2r+2s) = (r+s,0,2(r+s) ist wieder ein Element der gegebenen Menge. Da auch die S-Multiplikation abgeschlossen ist, liegt ein Teilraum vor.
   b) Diese Teilmenge ist weder bezüglich der Addition noch bezüglich der S-Multiplikation abgeschlossen. Z.B.: $(2, -r, r) + (2, -s, s) = (4, -(r+s), r+s)$ liegt nicht in der gegebenen Menge.
   c) Diese Menge ist ein Untervektorraum des $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.
   d) Hier ist weder die Addition noch die S-Multiplikation abgeschlossen.

2. **Beispiel:** Die Teilmenge B ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$, denn $(0,1,1) + (1,0,1) = (1,1,2) \notin B$.

3. **Beispiel:** Der Vektor $(2,4,1,2)$ ist nicht als Linearkombination der gegebenen Vektoren darstellbar.

4. **Beispiel:** Nein, es gibt unendlich viele Möglichkeiten. Eine weitere Möglichkeit ist beispielsweise $\frac{19}{3}x^2 - \frac{19}{3} = \frac{19}{3}(x-1)(x+1)$.

5. **Beispiel:** Nur der Vektorraum b) ist die lineare Hülle der gegebenen Polynome, denn

$$\begin{aligned} L(x+1, x^2, x^3-1) &= \{a(x+1) + bx^2 + c(x^3-1) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \\ &= \{cx^3 + bx^2 + ax + a - c \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

6. **Beispiel:** Nein, denn der Vektor $(0,1,0,-1) \in V$ ist beispielsweise nicht als Linearkombination der Vektoren $(1,0,0,-1)$ und $(1,0,-1,0)$ darstellbar.

Lösungen

Lineare Abhängigkeit, Basis, Dimension

1. **Beispiel:** Wer diese Aufgabe ohne Hilfe geschafft hat, dem gebührt volles Lob! Setzt man

$$\begin{aligned} u + v &= r, \\ u - v &= s, \\ u - 2v + w &= t, \end{aligned}$$

dann kann man die Vektoren u, v und w mit Hilfe der Vektoren r, s und t darstellen:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(r+s), \\ v &= \frac{1}{2}(r-s) \\ w &= t + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}s. \end{aligned}$$

Wozu das gut ist, sehen sie sogleich. Denn wir müssen die Frage beantworten, ob u, v und w linear unabhängig sind, d.h. ob die Gleichung

$$\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0$$

nur die triviale Lösung besitzt – und zwar unter der Voraussetzung, dass die Vektoren r, s und t linear unabhängig sind. Dann aber müssen wir auch die Vektoren r, s und t ins Spiel bringen! Also:

$$\lambda_1 \frac{1}{2}(r+s) + \lambda_2 \frac{1}{2}(r-s) + \lambda_3(t + \frac{1}{2}r - \frac{3}{2}s).$$

Nun noch gut durchschütteln, d.h. nach den Vektoren r, s und t ordnen:

$$r(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + s(\lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3) + t(2\lambda_3) = 0$$

Da r, s und t linear unabhängig sind, müssen die Koeffizienten von r, s und t verschwinden:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0, \\ 2\lambda_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt nur eine Lösung, nämlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Folglich sind die Vektoren u, v und w linear unabhängig.

2. **Beispiel:** Angenommen, es gäbe zwei verschiedene Darstellungen:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_m v_m$$

und

$$u = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \ldots + \mu_m v_m.$$

Dann folgt hieraus

$$u - u = (\lambda_1 - \mu_1)v_1 + (\lambda_2 - \mu_2)v_2 + \ldots + (\lambda_m - \mu_m)v_m = 0.$$

Da das m-tupel der Vektoren $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ linear unabhängig ist, müssen die Koeffizienten verschwinden. Also ist $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$, ..., $\lambda_m = \mu_m$ und die Darstellung somit eindeutig.

P.S.: "Blitzgneisser" würden antworten, das war wohl von vornherein klar: Denn das m-tupel der Vektoren $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ spannt einen Vektorraum mit der Basis $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ auf. Und in einem Vektorraum ist jeder Vektor durch die Basisvektoren eindeutig darstellbar.

3. **Beispiel:** Ja, wenn sie linear unabhängig wären, aber das sind sie leider nicht! Falls Sie mir dies nicht glauben, müssen Sie dies wohl oder übel nachrechnen - und dabei helfe ich Ihnen nun aber nicht!

4. **Beispiel:** Ihnen vorzurechnen, dass P ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist, wäre wohl unter Ihrer Würde. Falls Ihnen eine Basis nicht ohnehin schon ins Auge springt, dann könnte man diese folgendermaßen erschließen:

$$\begin{aligned} P &= \{(a, b, -b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(a, 0, 0, a) + (0, b, -b, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a(1, 0, 0, 1) + b(0, 1, -1, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Nun ist wohl klar, dass $((1, 0, 0, 1), (0, 1, -1, 0))$ eine Basis von P ist. Denn offensichtlich spannen diese Vektoren P auf, und dass sie linear unabhängig sind, sieht man ohne nachzurechnen. Nur der Vollständigkeit halber: $\dim P = 2$.

5. **Beispiel:** Haben Sie bereits realisiert, dass der Vektorraumes der Polynome vom Grad $\leq n$ die Dimension $n+1$ hat? OK, dann sind beiden Aufgaben ja rasch gelöst.

   a) Wir zeigen, dass diese $n + 1$ Vektoren linear unabhängig sind:

   $$\lambda_1(1) + \lambda_2(1 + t) + \lambda_3(1 + t + t^2) + \ldots + \lambda_{n+1}(1 + t + t^2 + \ldots + t^{n-1} + t^n) = 0.$$

   Nun sortieren wir nach Potenzen von t:

   $$1(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n+1}) + t(\lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n+1}) + \ldots + t^{n+1}(\lambda_n + \lambda_{n+1}) + t^n \lambda_{n+1} = 0.$$

   Diese Gleichung muss identisch in t erfüllt sein, d.h. für beliebige t, und das geht wohl nur wenn die Koeffizienten aller Potenzen von t verschwinden. Ich

hoffe, sie haben nicht übersehen, dass wir - da Polynome Funktionen sind - beim "Auswursteln" unseres Lösungsansatzes von Beginn an von den Funktionen auf die Funktionswerte übergegangen sind! Das zu lösende Gleichungssystem lautet nun:

   $$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n+1} &= 0, \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{n+1} &= 0, \\ &\vdots \\ \lambda_n + \lambda_{n+1} &= 0, \\ \lambda_{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

   Aufgrund der Dreiecksform des Gleichungssystems läßt sich die Lösung leicht erschließen: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$. Das gegebene $(n + 1)$-tupel ist linear unabhängig und bildet somit eine Basis der Polynome vom Grad $\leq n$.

   b) Auch diese n-tupel ist linear unabhängig, bildet aber keine Basis der Polynome vom Grad$\leq n$. Warum wohl?

6. **Beispiel:**

7. **Beispiel:**

8. **Beispiel:**