Übungsbeispiele

Lineare Abbildungen

1. **Beispiel** [000 000]: Sind die Abbildungen

   a) $f:\ \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR} \quad \text{mit} \quad f(x,y,z) = 7x + y - 4z$,

   b) $F:\ \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^3$
   $(x,y) \mapsto (1-x, y, x+y)$,

   c) $g:\ \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2 \quad \text{mit} \quad g(x,y) = (xy, y-x)$,

   linear?

2. **Beispiel** [000 000]: Es sei $T:\ \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^3$, wobei $T(x,y,z) = (2x, 4x-y, 2x+3y-z)$. Zeigen Sie, daß die Umkehrabbildung existiert und berechnen Sie T^{-1}.

3. **Beispiel** [000 000]: Es sei $\varphi:\ V \to W$ ein Isomorphismus. Beweisen Sie,

   $$(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_r))$$

   ist genau dann ein linear unabhängiges r-tupel von Vektoren in W, wenn

   $$(v_1, \ldots, v_r)$$

   ein linear unabhängiges r-tupel von Vektoren in V ist.

4. **Beispiel** [000 000]: Es sei $\varphi:\ V \to W$ ein Isomorphismus. Weiters seien U_1 und U_2 Untervektorräume von V und $U_1 + U_2$ habe die Dimension s. Zeigen Sie, daß dann auch der Untervektorraum $\varphi(U_1) + \varphi(U_2)$ die Dimension s hat.

5. **Beispiel** [901 125]: Es sei $f:\ \mathrm{IR}^3 \to \mathrm{IR}^3$ eine Abbildung mit

   $$\begin{aligned} f(0,1,-1) &= (0,1,-1), \\ f(2,6,-4) &= (0,0,0), \\ f(-1,-3,2) &= (0,-4,4). \end{aligned}$$

   Ist f eine lineare Abbildung?

6. **Beispiel** [913 126]: Es sei (e_1, e_2, e_3) die kanonische Basis des IR^3 und $f \in Hom(\mathrm{IR}^3, \mathrm{IR}^3)$ mit

   $$\begin{aligned} f(e_1) &= (1,0,1), \\ f(e_2) &= (2,0,2), \\ f(e_2) &= (0,1,0). \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie eine Basis des Bildes und eine Basis des Kerns von f.

7. **Beispiel** [931 037]: Ist die Abbildung $f:\ V \to W$ ein Automorphismus, wenn $V = W = \mathrm{IR}^3$ und

   $$f(a,b,c) = (a+c, b+c, c)$$

   gilt?

Übungsbeispiele

Matrizen

1. **Beispiel** [000 000]: Wie lauten die Matrizen, die den linearen Abbildungen

   a) $T(x, y) = (2y, 3x - y)$,
   b) $T(x, y, z) = x + y - 3z$,
   c) $T(x) = (2x, 4x, 3x)$

   entsprechen?

2. **Beispiel** [000 000]: Geben Sie die Matrix einer lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ an, deren Bild durch die Vektoren $(1, 2, 0, -4)$ und $(2, 0, -1, -3)$ erzeugt wird.

3. **Beispiel** [915 125]: Es sei $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ mit

$$\begin{array}{lcl} f(1,1,1) & = & (1,0,1,0), \\ f(-1,-1,0) & = & (0,1,0,1), \\ f(0,-1,-1) & = & (0,1,1,0). \end{array}$$

   Bestimmen Sie die Matrix dieser linearen Abbildung.

4. **Beispiel** [000 000]: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie $2(A - 2B)$.

5. **Beispiel** [000 000]: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die Ausdrücke AB, BA, AC, CA, BC, CB, A^2, B^2 und C^2, sofern sie definiert sind.

6. **Beispiel** [000 000]: Die sogenannten Pauli Spin-Matrizen lauten:

$$S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, daß folgende Relationen gelten:

$$S_xS_y = iS_Z, \quad S_yS_x = -iS_z, \quad S_x^2 = S_y^2 = S_z^2 = E$$

   mit

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. **Beispiel** [901 125]: Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$f(x, y) = (x - y, x + y).$$

   Bestimmen Sie die Matrix der zusammengesetzten Abbildung $f \circ f$.

8. **Beispiel** [728 017]: Stellen Sie die Transformationen

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & 2y_1 & - & y_2 \\ x_2 & = & -y_1 & + & 2y_2 \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcrcr} y_1 & = & z_1 & + & z_2 \\ y_2 & = & z_1 & - & z_2 \end{array}$$

   in Matrixform dar. Berechnen Sie die Matrix der zusammengesetzten Transformation $(z_1, z_2) \mapsto (x_1, x_2)$.

9. **Beispiel** [703 129]: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie A^n an. Beweisen Sie Ihre Behauptung durch vollständige Induktion.

10. **Beispiel** [929 116]: Ist die Abbildung $M(n \times n, \mathbb{R}) \to M(n \times n, \mathbb{R})$ mit

$$F(X) = AXB - BXA,$$

   wobei A und B zwei vorgegebene $(n \times n)$-Matrizen sind, linear?

Übungsbeispiele

Matrizen, Rang einer Matrix

1. **Beispiel** [825 113]: Es sei V der Vektorraum aller (2×2)-Matrizen über $\mathbb{R}$ und
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Ferner sei $F: V \to V$ eine lineare Abbildung, definiert durch
$$F(X) = XA - AX.$$
Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension des Kerns von von F.

2. **Beispiel** [700 107]: Zeigen Sie, daß
$$(A+B)A^{-1}(A-B) = (A-B)A^{-1}(A+B)$$
gilt, wenn A und B n–reihige, quadratische Matrizen sind und die zu A inverse Matrix existiert.

3. **Beispiel** [000 000]: Bestimmen Sie den Rang der Matrizen
$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. **Beispiel** [725 118]: Bestimmen Sie eine Matrix B vom Rang 2, so daß $AB = 0$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$
<u>Hinweis:</u> Es gilt $AB = (Ab_1, Ab_2, \ldots, Ab_n)$, wobei $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die Spalten der Matrix B sind.

5. **Beispiel** [919 127]: Es seien $f, h \in \mathrm{Hom(U,V)}$ und $g \in \mathrm{Hom(V,W)}$ mit $\mathrm{U = V = W} = \mathbb{R}^3$. Ferner sei
$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= (c, 0, a), \\ g(a,b,c) &= (-b, -c, a), \\ h(a,b,c) &= (b, c, -a). \end{aligned}$$
Stellen Sie die einzelnen Abbildungen durch Matrizen dar. Wie lautet die Matrix der Abbildung $(f \circ g) + (f \circ h)$? Stellen Sie diese Abbildung auch in der Form $((f \circ g) + (f \circ h))(a,b,c) = (\,?\,,\,?\,,\,?\,)$ dar.

Übungsbeispiele

Determinanten

1. **Beispiel** [000 000]: Bestimmen Sie die Determinante folgender Matrizen:
$$\text{a)} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. **Beispiel** [000 000]: Zeigen Sie allein durch elementare Zeilenumformungen, daß die Determinante der Matrix
$$\begin{pmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{pmatrix}$$
verschwindet.

3. **Beispiel** [813 125]: Es sei A eine quadratische Matrix mit n Zeilen der Form
$$A = \begin{pmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \vdots & & & & \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, daß $\det A = b^{n-1}(na+b)$.

4. **Beispiel** [000 000]: Es sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $k \in \mathbb{R}$. Begründen Sie, weshalb
$$\det(kA) = k^n \det A$$
gilt.

5. **Beispiel** [725 117]: Ist A eine schiefsymmetrische Matrix ungerader Ordnung, dann verschwindet ihre Determinante. Beweisen Sie diese Behauptung.

<u>Hinweis:</u> Wählen Sie als Ausgangsgleichung $A^t = -A$.

Übungsbeispiele

Determinanten und Matrizen

1. **Beispiel** [000 000]: Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie folgende Matrizenprodukte: $B^tA,\ BB^t,\ B^tB,\ (AB)^t,\ B^tA^t$.

2. **Beispiel** [000 000]: Zeigen Sie mittels konkreter Beispiele, daß die Summe zweier regulärer $(n \times n)$-Matrizen singulär und die Summe zweier singulärer $(n \times n)$-Matrizen regulär sein kann.

3. **Beispiel** [000 000]: Für welche Werte von t sind die Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -3 & t & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{pmatrix}$$

   singulär?

4. **Beispiel** [820 111]: Es sei E die Einheitsmatrix, und für die Matrix A gelte $A^t = A^{-1}$. Ferner sei $E + A$ regulär. Zeigen Sie, daß die Matrix $B = (E - A)(E + A)^{-1}$ schiefsymmetrisch ist.

5. **Beispiel** [725 117]: Es seien A und B zwei reguläre vertauschbare Matrizen ($AB = BA$). Zeigen Sie, daß dann auch die Matrizen

   a) A^{-1} und B,
   b) A und B^{-1},
   c) A^{-1} und B^{-1}

   vertauschbar sind.

   <u>Hinweis:</u> Es gilt $A^{-1}(AB)A^{-1} = A^{-1}(BA)A^{-1}$.

6. **Beispiel** [000 000]: Berechnen Sie die zu den Matrizen

$$\text{a)} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   jeweils inverse Matrix.

7. **Beispiel** [902 124]: Die Matrix A und ihre komplementäre (adjungierte) Matrix $\tilde{A}$ erfüllen die Gleichung

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = E \det A.$$

   Zeigen Sie, daß auch

$$\widetilde{AB} = \tilde{B}\tilde{A}$$

   gilt, wenn A und B n-reihige quadratische Matrizen sind.

Übungsbeispiele

Lineare Gleichungssysteme

1. **Beispiel** [000 000]: Bestimmen Sie eine Basis der Lösungsmenge der homogenen Gleichung
$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

2. **Beispiel** [000 000]: Lösen Sie das lineare Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 3x_1 &+& 2x_2 &+& 2x_3 &-& 5x_4 &=& 8 \\ 2x_1 &+& 5x_2 &+& 5x_3 &-& 18x_4 &=& 9 \\ 4x_1 &-& x_2 &-& x_3 &+& 8x_4 &=& 7 \end{array}$$
mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Bestimmen Sie weiters eine Basis des Bildes der Koeffizientenmatrix des gegebenen Gleichungssytems.

3. **Beispiel** [000 000]: Ermitteln Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems
$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 &+& 3x_2 &-& 4x_3 &-& x_4 &+& 2x_5 &=& 0 \\ x_1 &+& 2x_2 &-& 2x_3 &+& x_4 &+& 2x_5 &=& 0 \\ 2x_1 &+& 3x_2 &-& 2x_3 &+& 4x_4 &+& 4x_5 &=& 0. \end{array}$$
Bestimmen Sie weiters eine Basis des Kerns der Koeffizientenmatrix.

4. **Beispiel** [725 117]: Es sei $(0, 1, 0, 0)$ eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ mit der Koeffizientenmatrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & 6 \\ 3 & 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$
Ermitteln Sie mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$. Geben Sie auch die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems $Ax = b$ an.

5. **Beispiel** [817 014]: Es sei $\text{Lös}(A, b) = \{(5r - 2s, 1 - r, s + t, s, t - 2) \mid r, s, t \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge eines linearen inhomogenen Gleichungssystems. Bestimmen Sie daraus die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems. Wie groß ist die Dimension des Bildes von A?

6. **Beispiel** [823 033]: Lösen Sie das homogene Gleichungssystem $Ax = 0$, definiert durch die Koeffizientenmatrix
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix},$$
mit Hilfe der Cramer-Regel. Geben Sie auch eine Basis der Lösungsmenge an. Wie groß ist die Dimension des Kerns und des Bildes von A?

7. **Beispiel** [728 017]: Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 &-& x_2 &+& x_3 &-& x_4 &=& -2 \\ 2x_1 &+& x_2 &-& x_3 &+& 3x_4 &=& 9 \\ x_1 &+& 2x_2 &-& 2x_3 &+& 4x_4 &=& 11 \end{array}$$
mit Hilfe der Cramer-Regel. (Hinweis: Der Rang der erweiterten Matrix ist kleiner als 3.) Geben Sie den Rang der einfachen Matrix und die Dimension des Kerns der Koeffizientenmatrix an. Bestimmen Sie, ausgehend von der Lösungsmenge des inhomogenen Systems, eine Basis des Kerns der Koeffizientenmatrix.

8. **Beispiel** [728 027]: Für welche $k \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem
$$\begin{array}{rcrcrcl} kx &+& y &+& z &=& 1 \\ x &+& ky &+& z &=& 1 \\ x &+& y &+& kz &=& 1 \end{array}$$
in den Unbekannten x, y, z
   a) eindeutig lösbar,
   b) unlösbar,
   c) besitzt es unendlich viele Lösungen?

   Lösen Sie das Gleichungssystem für den Fall a) mit Hilfe der Cramer-Regel. Geben Sie die Lösungsmenge für den Fall c) an.

9. **Beispiel** [000 000]: Gegeben sei die Transformation
$$\begin{array}{rcrcrcr} x' &=& 2x &+& 4y &+& z \\ y' &=& x &+& 2y &+& z \\ z' &=& 3x &+& 4y &+& 2z. \end{array}$$
Wie lautet die inverse Transformation? Lösen Sie die gestellte Aufgabe durch Matrizeninversion.

Lösungen

Lineare Abbildungen

1. **Beispiel:** Nur die Abbildung a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = 7x + y - 4z$ ist linear.

2. **Beispiel:** Die Abbildung T ist genau dann injektiv, wenn der Kern,
$$\operatorname{Kern} T = \{(x,y,z) \mid T(x,y,z) = 0\},$$
nur aus dem Nullvektor besteht. Im vorliegenden Fall ist der Kern durch die Gleichung
$$(2x, 4x - y, 2x + 3y - z) = (0,0,0)$$
definiert. Die eindeutige Lösung lautet: $x = y = z = 0$, d.h., nur der Nullvektor $(0,0,0)$ liegt im Kern von T. Die Abbildung T ist somit injektiv. Da $\dim V = \dim W$, ist die Abbildung T auch surjektiv. Also existiert T^{-1}. Wendet man nun auf
$$T(x,y,z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$$
die Abbildung T^{-1} an, so resultiert hieraus
$$(x,y,z) = T^{-1}(2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$
Setzt man $u = 2x$, $v = 4x - y$, und $w = 2x + 3y - z$, gewinnt man schließlich
$$T^{-1}(u,v,w) = (\frac{u}{2}, 2u - v, 7u - 3v - w).$$

3. **Beispiel:** Angenommen, $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_r))$ ist linear abhängig, dann gibt es mindestens ein $\lambda_i \neq 0$, so daß
$$\lambda_1\varphi(v_1) + \ldots + \lambda_i\varphi(v_i) + \ldots + \lambda_r\varphi(v_r) = 0.$$
Aufgrund der Linearität von φ folgt hieraus
$$\varphi(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_r v_r) = 0.$$
Da wegen der Injektivität von φ nur der Nullvektor in den Nullvektor abgebildet wird, ist
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_r v_r = 0,$$
obwohl mindestens ein $\lambda_i \neq 0$. Dann aber wäre auch $(v_1, \ldots, v_r)$ linear abhängig. Wird umgekehrt $(v_1, \ldots, v_r)$ als linear abhängig angenommen, dann gibt es mindestens ein $\lambda_i \neq 0$, so daß
$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_r v_r = 0.$$
Wendet man nun hierauf die Abbildung φ an, so ergibt sich ….

4. **Beispiel:** Gemäß der Definition der Summe von zwei Untervektorräumen ist
$$\varphi(U_1) + \varphi(U_2) = \{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) \mid x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2\}.$$
Da φ eine lineare Abbildung ist, folgt hieraus
$$\varphi(U_1) + \varphi(U_2) = \{\varphi(x_1 + x_2) \mid x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2\}.$$
Nach nochmaliger Anwendung der Definition der Summe zweier Untervektorräume erhält man:
$$\begin{aligned}\varphi(U_1) + \varphi(U_2) &= \{\varphi(x) \mid x \in U_1 + U_2\}\\ &= \varphi(U_1 + U_2).\end{aligned}$$
Nun ist noch zu zeigen, daß $\dim \varphi(U_1 + U_2) = \dim(U_1 + U_2)$ ist. Sei $(v_1, \ldots, v_s)$ eine Basis von $U_1 + U_2$. Dann gilt aufgrund der Definition der Summe von zwei Untervektorräumen und der Linearität von φ
$$\begin{aligned}\varphi(U_1 + U_2) &= \{\varphi(x) \mid x \in U_1 + U_2\}\\ &= \{\varphi(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s) \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}\}\\ &= \{\lambda_1\varphi(v_1) + \cdots + \lambda_s\varphi(v_s) \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{R}\}\\ &= L(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_s)).\end{aligned}$$
Da φ injektiv ist, folgt aus der linearen Unabhängigkeit von $(v_1, \ldots, v_s)$ jene von $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_s))$. Damit gilt insgesamt
$$\dim(U_1 + U_2) = \dim \varphi(U_1 + U_2) = \dim(\varphi(U_1) + \varphi(U_2)) = s.$$

5. **Beispiel:** Angenommen, f ist eine lineare Abbildung, dann gilt
$$f(2,6,-4) = (-2)f(-1,-3,2) = (-2)(0,-4,4) = (0,8,-8).$$
Dieses Resultat steht jedoch im Widerspruch zu
$$f(2,6,-4) = (0,0,0).$$
Folglich ist f keine lineare Abbildung.

6. **Beispiel:** Die Bilder der Basisvektoren spannen das Bild von f auf, denn
$$\begin{aligned}\operatorname{Bild} f &= \{f(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}\\ &= \{f(xe_1 + ye_2 + ze_3 \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}\\ &= \{xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}\\ &= L(f(e_1), f(e_2), f(e_3))\\ &= L((1,0,1),(2,0,2),(0,1,0)).\end{aligned}$$

Da der Vektor $(2,0,2)$ von $(1,0,1)$ linear abhängig ist, ist bereits $((1,0,1),(0,1,0))$ eine Basis des Bildes von f.

Wie aus obiger Umformung hervorgeht, ist aufgrund der Linearität

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3) \\ &= x(1,0,1)+y(2,0,2)+z(0,1,0) \\ &= (x+2y,z,x+2y). \end{aligned}$$

Der Kern von f ist die Menge $\{(x,y,z) \mid f(x,y,z)=(0,0,0)\}$ und daher durch die Lösungsmenge des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcl} x + 2y & & = 0 \\ & z & = 0 \\ x + 2y & & = 0 \end{array}$$

gegeben. Also ist der

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern} f &= \{(-2y,y,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2,1,0) \mid y \in \mathbb{R}\} \\ &= L(-2,1,0) \end{aligned}$$

und somit der Vektor $(-2,1,0)$ eine Basis des Kerns von f.

7. **Beispiel:** Offenbar ist f eine lineare Abbildung. Der Kern von f ist durch

$$\begin{array}{rcl} a + c & = & 0 \\ b + c & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array}$$

definiert. Hieraus folgt $a=b=c=0$. Somit ist die Abbildung f injektiv. Wegen $\dim V = \dim W$ ist f auch surjektiv. Da $V=W$ gilt, ist die Abbildung f ein Automorphismus.

Lösungen

Matrizen

1. **Beispiel:** Die gesuchten Matrizen haben folgende Form:

$$\text{a)} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad \text{c)} \quad T = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. **Beispiel:** Die Bilder der Basisvektoren des Urbildraumes spannen das Bild einer linearen Abbildung auf (siehe: Lösungen "Lineare Abbildungen" 6. Beispiel). Da die Spalten der F zugeordneten Matrix durch die Bilder der kanonischen Basisvektoren des $\mathbb{R}^3$ gegeben sind, ist jede (4×3)-Matrix, deren Spalten das Bild $F = L((1,2,0,-4),(2,0,-1,-3))$ erzeugen, eine Lösung der vorliegenden Fragestellung. Eine solche Möglichkeit stellt die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

dar.

3. **Beispiel:** Aufgrund der Linearität von f sind die Bilder der kanonischen Basisvektoren durch

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= f((1,1,1)+(0,-1,-1)) = f(1,1,1)+f(0,-1,-1) \\ &= (1,0,1,0)+(0,1,1,0) = (1,1,2,0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,1,0) &= f(-(1,1,1)-(-1,-1,0)-(0,-1,-1)) \\ &= -f(1,1,1)-f(-1,-1,0)-f(0.-1,-1) \\ &= -(1,0,1,0)-(0,1,0,1)-(0,1,1,0) = (-1,-2,-2,-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0,0,1) &= f((1,1,1)+(-1,-1,0)) = f(1,1,1)+f(-1,-1,0) \\ &= (1,0,1,0)+(0,1,0,1) = (1,1,1,1) \end{aligned}$$

gegeben. Somit lautet die Matrix der linearen Abbildung f:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. **Beispiel:** Man erhält

$$2(A-2B) = \begin{pmatrix} 24 & -14 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. **Beispiel:** Es sind nur folgende Matrizen definiert:

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 16 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 11 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 33 & 26 & 3 \\ 14 & 14 & 7 \\ 3 & -4 & 20 \end{pmatrix}.$$

6. **Beispiel:** Der Buchstabe i bezeichnet die imaginäre Einheit mit $i^2 = -1$.

7. **Beispiel:** Gemäß der Regel: "Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren", ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Matrix der Abbildung f. Die Matrix der zusammengesetzten Abbildung $f \circ f$ ist durch die Produktmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

8. **Beispiel:** In Matrixform lauten die Transformationen:

$$x = T_1 y \qquad \text{und} \qquad y = T_2 z$$

mit

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \; T_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \;\text{ und }\; T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix T der zusammengesetzten Transformation

$$x = T_1 T_2 z = Tz$$

ist die Produktmatrix

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

9. **Beispiel:** Durch wiederholte Anwendung der Matrix A auf A erhält man:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \dots .$$

Vermutlich gilt

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist diese Formel für $n = 1$ erfüllt. Aus der Annahme, daß diese Formel für ein beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt, daß sie auch für $n+1$ richtig ist, denn

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist diese Formel für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig.

10. **Beispiel:** Die Abbildung F ist linear, denn für $X, Y \in M(n \times n, \mathbb{R})$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} F(\lambda X + \mu Y) &= A(\lambda X + \mu Y)B - B(\lambda X + \mu Y)A \\ &= (\lambda AX + \mu AY)B - (\lambda BX + \mu BY)A \\ &= (\lambda AXB + \mu AYB) - (\lambda BXA + \mu BYA) \\ &= (\lambda AXB - \lambda BXA) + (\mu AYB - \mu BYA) \\ &= \lambda(AXB - BXA) + \mu(AYB - BYA) \\ &= \lambda F(X) + \mu F(Y). \end{aligned}$$

Lösungen

Matrizen, Rang einer Matrix

1. **Beispiel:** Zur Bestimmung des

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern} F &= \{X \mid F(X) = 0\} \\ &= \{X \mid XA - AX = 0\}\end{aligned}$$

mit

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ist die Gleichung

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -2c & 2a+2b-2d \\ -2c & 2c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

zu lösen. Die Lösung lautet: $c = 0$ und $a = d - b$ mit $b, d \in \mathrm{IR}$. Somit hat der Kern die Form

$$\begin{aligned}\operatorname{Kern} F &= \left\{\begin{pmatrix} d-b & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathrm{IR}\right\} \\ &= \left\{b\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b, d \in \mathrm{IR}\right\},\end{aligned}$$

und das Matrizenpaar $\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ bildet eine Basis des zweidimensionalen Kerns von F.

2. **Beispiel:** Einfache matrizenalgebraische Umformungen zeigen, daß die gegebene Gleichung identisch in A und B erfüllt ist:

$$\begin{aligned}(A+B)A^{-1}(A-B) &= (A-B)A^{-1}(A+B) \\ (A+B)(A^{-1}A - A^{-1}B) &= (A-B)(A^{-1}A + A^{-1}B) \\ (A+B)(E - A^{-1}B) &= (A-B)(E + A^{-1}B) \\ A + B - AA^{-1}B - BA^{-1}B &= A - B + AA^{-1}B - BA^{-1}B \\ A + B - B - BA^{-1}B &= A - B + B - BA^{-1}B\end{aligned}$$

3. **Beispiel:** Im Fall a) besteht die Matrix aus zwei Zeilen; also kann der Rang nicht größer als 2 sein. Da die ersten beiden Spalten der Matrix linear unabhängig sind, hat die Matrix den Rang 2.

Zur Bestimmung des Ranges der Matrix b) sind elementare Zeilenumformungen zielführend:

$$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ -8 & -1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Die drei Matrixzeilen sind linear unabhängig. Somit hat die Matrix den Rang 3.

4. **Beispiel:** Gesucht ist eine Matrix

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

vom Rang 2, so daß $AB = 0$. Da A drei Spalten hat, muß B eine dreizeilige Matrix sein. Aufgrund der Forderung, daß B den Rang 2 besitzen soll, muß B mindestens zwei Spalten aufweisen. Die Gleichung $AB = 0$ kann auch in der Form

$$(Ab_1, Ab_2) = 0$$

mit $b_i = \begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, und daher in der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ b_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Die unbekannten Matrixelemente müssen daher folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned}1b_{1i} + 1b_{2i} + 2b_{3i} &= 0, \\ 2b_{1i} + 2b_{2i} + 4b_{3i} &= 0, \\ 3b_{1i} + 3b_{2i} + 6b_{3i} &= 0.\end{aligned}$$

Die Lösung lautet: $b_{1i} = -b_{2i} - 2b_{3i}$ mit $b_{2i}, b_{3i} \in \mathrm{IR}$. Je zwei linear unabhängige Lösungsvektoren bilden die beiden Spalten möglicher Formen der gesuchten Matrix, wie z.B.:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aufgrund der Wahl von $b_{21} = 1$ und $b_{31} = 0$, bzw. $b_{22} = 0$ und $b_{32} = 1$.

5. **Beispiel:** Den einzelnen Abbildungen entsprechen folgende Matrizen:

$$f \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (f \circ g) + (f \circ h) \quad &\to \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Abbildung $(f \circ g) + (f \circ h)$ ist auch in der Form

$$((f \circ g) + (f \circ h))(a, b, c)) = (0, 0, 0)$$

darstellbar.

Lösungen

Determinanten

1. **Beispiel:** Vielleicht gelingen Ihnen noch effizientere Berechnungen der folgenden Determinanten:

a)
$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 8 \\ 15 & 3 & 6 \\ 10 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 30\,(-2) \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -60\,(1-4) = 180,$$

b)
$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ -3 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

c)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \frac{2}{6} \begin{vmatrix} -6 & 8 & -2 \\ -6 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{2}{6} \begin{vmatrix} -6 & 8 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \frac{2}{6}(-6) \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ 1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= -2(-50-5) = 90.$$

2. **Beispiel:** Addieren Sie die zweite und dritte Zeile zur ersten Zeile:

$$\begin{vmatrix} a-b & m-n & x-y \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b-c & n-p & y-z \\ c-a & p-m & z-x \end{vmatrix} = 0.$$

3. **Beispiel:** Zunächst addiert man zur ersten Spalte alle übrigen und zieht den gemeinsamen Faktor nach vor. Dann subtrahiert man die erste Zeile von allen übrigen und erhält auf diese Weise eine n-zeilige obere Dreiecksmatrix, deren Determinante durch das Produkt der Diagonalelemente gegeben ist:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ \vdots & & & & \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} na+b & a & a & \cdots & a \\ na+b & a+b & a & \cdots & a \\ \vdots & & & & \\ na+b & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} \\
&= (na+b)\begin{vmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ 1 & a+b & a & \cdots & a \\ \vdots & & & & \\ 1 & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix} = (na+b)\begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} \\
&= b^{n-1}(na+b).
\end{aligned}$$

4. **Beispiel:** In der Matrix $A' = kA$ enthält jedes Element den Faktor k. Aufgrund der Linearität der Determinante in den Zeilen der Matrix A', kann aus jeder Zeile der Faktor k vor die Determinante gezogen werden.

5. **Beispiel:** Für schiefsymmetrische Matrizen gilt:

$$A^t = -A.$$

Bildet man nun die Determinante

$$\det A^t = \det(-A)$$

und berücksichtigt man, daß $\det A^t = \det A$ und $\det(-A) = -\det A$, da die Matrix von ungerader Ordnung ist, so gilt weiters

$$\det A = -\det A,$$

woraus folgt, daß die Determinante verschwindet.

Lösungen
Determinanten und Matrizen

1. **Beispiel:** Man erhält folgende Resultate für die Matrizenprodukte:

$$B^tA = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -7 \\ 21 & 20 & 8 \end{pmatrix}, \quad BB^t = \begin{pmatrix} 20 & 4 & 6 \\ 4 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$B^tB = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 21 \end{pmatrix}, \quad (AB)^t = \begin{pmatrix} 9 & 20 \\ 4 & 16 \\ -3 & 12 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -3 \\ 20 & 16 & 12 \end{pmatrix} = B^tA^t.$$

2. **Beispiel:** Mögliche Beispiele sind

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Beispiel:** Addiert man im Fall a) zunächst die erste Spalte der Matrix zur dritten und dann die dritte Zeile zur ersten, so findet man rasch folgenden Wert für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -3 & k & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & -2 \\ -3 & k & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ -3 & k & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -12k.$$

Somit ist die Matrix für $k = 0$ singulär.

Im Fall b) addiert man die zweite Spalte zur ersten und die dritte zur zweiten Spalte. Dann zieht man aus der ersten und zweiten Spalte den Faktor $t+2$ vor die Determinante. Nun subtrahiert man von der zweiten Zeile die erste und erhält schließlich

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ -3 & t+5 & -3 \\ -6 & 6 & t-4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t+2 & 0 & -3 \\ t+2 & t+2 & -3 \\ 0 & t+2 & t-4 \end{vmatrix} = (t+2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & t-4 \end{vmatrix} \\
&= (t+2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-4 \end{vmatrix} = (t+2)^2(t-4).
\end{aligned}$$

Also wird für $t=-2$ und $t=4$ die Matrix singulär.

4. **Beispiel:** Man zeigt, daß $-B = B^t$ ist, indem man die Identitäten $(AB)^t = B^tA^t$, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$ und $(A+B)^t = A^t + B^t$ anwendet und auftretende inverse Terme eliminiert:

$$\begin{aligned}
-(E-A)(E+A)^{-1} &= ((E-A)(E+A)^{-1})^t\\
(A-E)(E+A)^{-1} &= ((E+A)^{-1})^t(E-A)^t\\
(A-E)(E+A)^{-1} &= ((E+A)^t)^{-1}(E-A)^t\\
(A-E) &= ((E+A)^t)^{-1}(E-A)^t(E+A)\\
(E+A)^t(A-E) &= (E-A)^t(E+A)\\
A-E+A^tA-A^t &= E+A-A^t-A^tA\\
-E+A^tA &= E-A^tA\\
-E+A^{-1}A &= E-A^{-1}A\\
-E+E &= E-E.
\end{aligned}$$

5. **Beispiel:** Der gegebene Hinweis, den man bloß auf naheliegende Weise zu variieren hat, liefert den Trick zum Erfolg:

a)
$$\begin{aligned}
A^{-1}(AB)A^{-1} &= A^{-1}(BA)A^{-1}\\
(A^{-1}A)(BA^{-1}) &= (A^{-1}B)(AA^{-1})\\
BA^{-1} &= A^{-1}B,
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
B^{-1}(AB)B^{-1} &= B^{-1}(BA)B^{-1}\\
(B^{-1}A)(BB^{-1}) &= (B^{-1}B)(AB^{-1})\\
B^{-1}A &= AB^{-1},
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
A^{-1}(B^{-1}A)A^{-1} &= A^{-1}(AB^{-1})A^{-1}\\
(A^{-1}B^{-1})(AA^{-1}) &= (A^{-1}A)(B^{-1}A^{-1})\\
A^{-1}B^{-1} &= B^{-1}A^{-1}.
\end{aligned}$$

6. **Beispiel:** Im Fall a) ist $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ zu berücksichtigen. Im Fall b) und c) kommen Sie wohl nicht darum herum, die Kofaktoren zu berechnen. Außer, Sie erraten die Lösung für c) und prüfen ob das Produkt der gegebenen Matrix mit der erratenen inversen Matrix die Einheitsmatrix liefert. Jedenfalls lauten die Ergebnisse:

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\quad \text{b)}\ \begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ -15 & 6 & -5\\ 5 & -2 & 2\end{pmatrix}\quad \text{und}\quad \text{c)}\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 1/a\\ 0 & 1/b & 0\\ 1/c & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Lösungen

Lineare Gleichungssysteme

1. **Beispiel:** Die Lösungsmenge lautet:

$$\begin{aligned}
\text{Lös}(A,0) &= \{(x_1,x_2,x_3) \mid x_1 = -x_2-x_3,\ x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}\\
&= \{(-x_2-x_3,x_2,x_3) \mid x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}\\
&= \{x_2(-1,1,0)+x_2(-1,0,1) \mid x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Somit bildet das Paar $((-1,1,0),(-1,0,1))$ eine Basis der Lösungsmenge des homogenen Gleichungssytems $x_1+x_2+x_3=0$.

2. **Beispiel:** Elementaren Zeilenumformungen der erweiterten Matrix

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b\\ \hline\hline 3 & 2 & 2 & -5 & 8\\ 2 & 5 & 5 & -18 & 9\\ 4 & -1 & -1 & 8 & 7\end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b\\ \hline\hline 3 & 2 & 2 & -5 & 8\\ 6 & 15 & 15 & -54 & 27\\ 12 & -3 & -3 & 24 & 21\end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b\\ \hline\hline 3 & 2 & 2 & -5 & 8\\ 0 & 11 & 11 & -44 & 11\\ 0 & -11 & -11 & 44 & -11\end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b\\ \hline\hline 3 & 2 & 2 & -5 & 8\\ 0 & 1 & 1 & -4 & 1\end{array}$$

führen auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 &= 8\\
x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1,
\end{aligned}$$

wobei x_3, und x_4 als frei wählbare Parameter aufgefaßt werde können. Daraus gewinnt man die Lösungsmenge

$$\begin{aligned}
\text{Lös}(A,b) &= \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid\ x_1 = 2-x_4,\ x_2 = 1-x_3+4x_4,\ x_3,x_4 \in \mathbb{R}\}\\
&= \{(2-x_4, 1-x_3+4x_4, x_3, x_4) \mid x_3,x_4 \in \mathbb{R}\}\\
&= \{(2,1,0,0)+x_3(0,-1,1,0)+x_4(-1,4,0,1) \mid x_3,x_4 \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Aus den elementaren Zeilenumformungen geht hervor, daß die Koeffizientenmatrix den Rang 2 besitzt. Somit spannen je zwei linear unabhängige Spalten der Koeffizientenmatrix das Bild auf, wie z.B. das Paar $((3,2,4),(2,5,-1))$.

3. **Beispiel:** Das Gaußsche Eliminationsverfahren liefert:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
1	3	−4	−1	2	0
1	2	−2	1	2	0
2	3	−2	4	4	0
1	3	−4	−1	2	0
0	−1	2	2	0	0
0	−3	6	6	0	0
1	3	−4	−1	2	0
	−1	2	2	0	0

Hieraus ergibt sich die Lösungsmenge zu

$$\begin{aligned}\text{Lös}(A,0) &= \{(-2x_3-5x_4-2x_5, 2x_3+2x_4, x_3, x_4, x_5) \mid x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x_3(-2,2,1,0,0)+x_4(-5,2,0,1,0)+x_5(-2,0,0,0,1) \mid \ x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

wobei $((-2,2,1,0,0),(-5,2,0,1,0),(-2,0,0,0,1))$ eine Basis der Koeffizientenmatrix darstellt.

4. **Beispiel:** Die Lösungsmenge des homogenen Systems lautet:

$$\begin{aligned}\text{Lös}(A,0) &= \{(-x_3+2x_4, 2x_3-2x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x_3(-1,2,1,0)+x_4(2,-2,0,1) \mid \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

und für das inhomogene System ergibt sich die Lösungsmenge

$$\text{Lös}(A,b) = \{(0,1,0,0)+x_3(-1,2,1,0)+x_4(2,-2,0,1) \mid \ x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

5. **Beispiel:** Wählt man als spezielle Lösung des inhomogenen Systems den Vektor $(0,1,0,0,-2)$, dann erhält man

$$\begin{aligned}\text{Lös}(A,0) &= \{(5r-2s, 1-r, s+t, s, t-2)-(0,1,0,0,-2) \mid r,s,t \in \mathbb{R}\}\\ &= \{(5r-2s, -r, s+t, s, t) \mid r,s,t \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

als Lösungsmenge des homogenen Systems. Diese 2-dimensionale Lösungsmenge ist der Kern der Koeffizientenmatrix. Aus der Dimensionsformel erhält man für die Dimension des Bildes von A, die dem Rang der Koeffizientenmatrix entspricht,

$$\text{rg}A = n - \dim \text{Kern}A = 5-3 = 2.$$

6. **Beispiel:** Die dritte Matrix- bzw. Gleichungszeile entspricht dem zweifachen der zweiten Zeile und ist daher überflüssig. Somit lautet das Restsystem mit nichtverschwindender Koeffizientenmatrix, auf das die Cramer-Regel angewandt werden kann,

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 &= x_3\\ x_1 + x_2 &= x_3.\end{aligned}$$

Mit

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 2, \quad D_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 1\\ x_3 & 1\end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad D_1 = \begin{vmatrix} 3 & x_3\\ 1 & x_3\end{vmatrix} = 2x_3$$

erhält man

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 0, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = x_3$$

und somit als Lösungsmenge

$$\text{Lös}(A,0) = \{(0, x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Der Vektor $(0,1,1)$ ist eine Basis der Lösungsmenge, $\dim \text{Kern}\, A = 1$ und $\dim \text{Bild}\, A = 2$.

7. **Beispiel:** Da $\text{rg}\, A_{erw} < 3$ ist, kann der Rang der einfachen Matrix maximal zwei sein. Die ersten beiden Gleichungszeilen sind linear unabhängig. Somit ist die Cramer-Regel auf das Restsystem

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= -2 - x_3 + x_4\\ 2x_1 + x_2 &= 9 + x_3 - 3x_4.\end{aligned}$$

mit nichtverschwindender Koeffizientenmatrix anwendbar und liefert:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{3}(7-2x_4) \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{1}{3}(13+3x_3-5x_4),$$

b.z.w.:

$$\text{Lös}(A,b) = \{(\frac{7}{3}-\frac{2}{3}x_4, \frac{13}{3}+x_3-\frac{5}{3}x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Da $\text{rg}\, A = 2$, liefert die Dimensionformel dim Kern A $= n - \text{rg}A = 4-2 = 2$. Wählt man als spezielle Lösung des inhomogenen Systems den Vektor $(\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, 0, 0)$, dann ergibt sich der Kern der Koeffizientenmatrix A zu

$$\begin{aligned}\text{Kern}\, A &= \{(\frac{7}{3}-\frac{2}{3}x_4, \frac{13}{3}+x_3-\frac{5}{3}x_4, x_3, x_4) - (\frac{7}{3}, \frac{13}{3}, 0, 0) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}\\ &= \{x_3(0,1,1,0)+x_4(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}, 0, 1) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\},\end{aligned}$$

und das Paar $((0,1,1,0),(-2,-5,0,3))$ bildet eine Basis des Kerns der Koeffizientenmatrix.

8. **Beispiel:** Für alle Werte von t, für die die Determinante der Koeffizientenmatrix nicht verschwindet, ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar, da dann $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_{erw} = n = 3$ gilt. Elementare Zeilenumformungen führen auf

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ k+2 & k & 1 \\ k+2 & 1 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k+2 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-1)(k-1).$$

Somit ist das Gleichungssystem für alle $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ eindeutig lösbar. Für $t = -2$ ist $\operatorname{rg} A = 2$ und $\operatorname{rg} A_{erw} = 3$ und das Gleichungssystem daher unlösbar. Für $t = 1$ besitzt das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen, da in diesem Fall $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_{erw} = 1$.

Wendet man im Fall a) zur Lösung des Gleichungssystems die Cramer-Regel an, so erhält man zunächst für die einzelnen Determinanten die Werte

$$D = (k+2)(k-1)^2, \quad D_1 = D_2 = D_3 = (k-1)^2$$

und damit die Lösung

$$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{k+2}.$$

Im Fall c) sind alle drei Gleichungen des Systems identisch:

$$x + y + z = 1.$$

Die zugehörige Lösungsmenge lautet:

$$\text{Lös}(A, b) = \{(1 - z - y, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

9. **Beispiel:** Die Transformation lautet in Matrixform

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Berechnet man die zur vorliegenden Transformationsmatrix invere Matrix, so erhält man die gesuchte Umkehrtransformation in der Gestalt:

$$\begin{aligned} x &= & -2y' &+ z' \\ y &= \tfrac{1}{2}x' + & \tfrac{1}{2}y' &- \tfrac{1}{2}z' \\ z &= -x' + & 2y' & . \end{aligned}$$