Gaußscher Algorithmus zur Lösung linearer Gleichungssysteme

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 6 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -4 & 0 & -10 & -4 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 4 & -1 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & -1 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bilden die erweiterte Matrix

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	2	0	0	4	0	0	3
2	4	4	0	6	4	4	4
-1	-2	-4	0	-10	-4	-4	-9
1	2	0	-1	2	0	-1	1
3	6	4	-1	7	4	3	4
2	4	4	-1	3	4	3	1

und führen mit dem Ziel, in der ersten Spalte unterhalb der Zahl Eins Nullen zu erhalten, elementare Zeilenumformungen durch:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	2	0	0	4	0	0	3
0	0	**4**	0	-2	4	4	-2
0	0	-4	0	-6	-4	-4	-6
0	0	0	-1	-2	0	-1	-2
0	0	4	-1	-5	4	3	-5
0	0	4	-1	-5	4	3	-5

Nun tritt in der zweiten Matrixzeile eine Abweichung von der idealen Staffelung auf, worum wir uns aber zunächst nicht kümmern müssen. Die letzten beiden Zeilen erweisen sich als identisch. Wir können somit ab dem nächsten Umformungsschritt auf ein Mitschleppen der letzten Zeile verzichten:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	2	0	0	4	0	0	3
0	0	**4**	0	-2	4	4	-2
0	0	0	0	-8	0	0	-8
0	0	0	-1	-2	0	-1	-2
0	0	0	-1	-3	0	-1	-3

Wieder tritt eine Abweichung von einer idealen Staffelung auf, die wir jedoch durch eine Vertauschung der dritten mit der vierten Matrixzeile beseitigen können:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	2	0	0	4	0	0	3
0	0	**4**	0	-2	4	4	-2
0	0	0	**-1**	-2	0	-1	-2
0	0	0	0	-8	0	0	-8
0	0	0	-1	-3	0	-1	-3

Jetzt subtrahieren wir von der sechsten die dritte Zeile:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	2	0	0	4	0	0	3
0	0	**4**	0	-2	4	4	-2
0	0	0	**-1**	-2	0	-1	-2
0	0	0	0	-8	0	0	-8
0	0	0	0	-1	0	0	-1

Da die letzten beiden Zeilen linear abhängig sind, reduzieren wir das erhaltene Schema um die vorletzte Zeile:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	b
1	2	0	0	4	0	0	3
0	0	**4**	0	-2	4	4	-2
0	0	0	**-1**	-2	0	-1	-2
0	0	0	0	**-1**	0	0	-1

Äquivalent hiezu hätte man die vorletze Zeile auch dadurch "vernichten" können, indem man das 8-fache der letzten zur vorletzten Zeile addiert und auf die resultierende Zeile aus lauter Nullen verzichtet.

Durch die vorgenommenen elementaren Zeilenumformungen und durch das Weglassen überflüssiger Zeilen hat sich das ursprüngliche Gleichungssystem auf vier linear unabhängige Gleichungszeilen reduziert.

Das Gleichungssystem ist lösbar, denn

$$\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}A_{erw} = 4,$$

wobei A die Koeffizientenmatrix des zu lösenden Gleichungssystems bezeichnet. Übrigens, wenn das Gleichungssystem nicht lösbar währe, hätte sich mindestens eine Zeile in der Form

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \;|\; \mathrm{c}$$

mit $c \neq 0$ ergeben. Da sich die Dimension des Kerns von A aus der Dimensionsformel für lineare Abbildungen zu

$$\dim(\text{Kern } A) = n - \text{rg} A = 7 - 4 = 3$$

ergibt, sind drei der sieben Unbekannten frei wählbar. Welche drei? - Mit Sicherheit jene, die im gewonnenen Zahlenschema über Spalten ohne fettgedruckte Zahlen stehen, also x_2, x_6 und x_7. Es kann aber auch eine andere Auswahl getroffen werden. (Keine fettgedruckten Zahlen stehen in jenen Spalten, die von der idealen Staffelung abweichen.)

Nun sind zwei verschiedene Vorgangsweisen möglich:

- A) Man sucht zunächst eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems und bestimmt eine Basis des Kerns, um schlußendlich die Lösung des inhomogenen Gleichungssystems in übersichtlicher Form darzustellen:

1. **Spezielle Lösung des inhomogenen Systems:**

Man wählt zweckmäßigerweise $x_2 = x_6 = x_7 = 0$ und gewinnt damit aus dem vorhin erhaltenen Zahlenschema das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & 4x_5 & = & 3 \\ 4x_3 & - & 2x_5 & = & -2 \\ -x_4 & - & 2x_5 & = & -2 \\ & & -x_5 & = & -1 \end{array}$$

woraus man sofort, indem man das Gleichungsystem mit der letzten Zeile beginnend von unten nach oben löst, der Reihe nach $x_5 = 1$, $x_4 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_1 = -1$ erhält. Damit liegt ein spezieller Lösungsvektor des inhomogenen Systems in der Form

$$v_0 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$$

vor.

2. **Basis des Kerns der Koeffizientenmatrix:**

Wir erhalten fußend auf dem gewonnenen Zahlenschema für spezielle Festlegungen der frei wählbaren Unbekannten x_2, x_6 und x_7 folgende homogene Gleichungssysteme:

(a) $\underline{x_2 = 1,\ x_6 = 0 \text{ und } x_7 = 0:}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2 & + & 4x_5 & = & 0 \\ & & 4x_3 & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & -x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & x_5 & = & 0 \end{array}$$

Auch hier löst man am besten von unten nach oben das Gleichungssystem Man erhält: $x_5 = 0$, $x_4 = 0$, $x_3 = 0$ und $x_1 = -2$ und somit als ersten Basisvektor für den Kern von A

$$v_1 = (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0).$$

(b) $\underline{x_2 = 0,\ x_6 = 1 \text{ und } x_7 = 0:}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_1 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 4x_3 & - & 2x_5 & + & 4 & = & 0 \\ & & -x_4 & - & 2x_5 & = & 0 \\ & & & & -x_5 & = & 0 \end{array}$$

Die Auflösung liefert $x_5 = 0$, $x_4 = 0$, $x_3 = -1$, $x_1 = 0$ und als zweiten Basisvektor des Kerns von A

$$v_2 = (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0).$$

(c) $\underline{x_2 = 0,\ x_6 = 0 \text{ und } x_7 = 1:}$

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & x_1 & + & 4x_5 & = & 0 \\ 4x_3 & - & 2x_5 & + & 4 & = & 0 \\ -x_4 & - & 2x_5 & - & 1 & = & 0 \\ & & & & -x_5 & = & 0 \end{array}$$

Man erhält $x_5 = 0$, $x_4 = -1$, $x_3 = -1$, $x_1 = 0$ und den dritten Basisvektor des Kerns von A in der Gestalt

$$v_3 = (0, 0, -1, -1, 0, 0, 1).$$

3. **Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems:**

Die gewonnenen Resultate führen unmittelbar auf folgende Darstellung für die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rll} \text{Lös}(A, b) & = \{(-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) & + \ \lambda_1 (-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ & & + \ \lambda_2 (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0) \\ & & + \ \lambda_3 (0, 0, -1, -1, 0, 0, 1) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{R}\}. \end{array}$$

Die Lösungsmenge kann auch in der Form

$$\text{Lös}(A, b) = \{(-1 - 2\lambda_1, \lambda_1, -\lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_3, 1, \lambda_2, \lambda_3) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathcal{R}\}$$

angegeben werden.

- B) Schneller erreicht man obiges Ziel, indem man zuerst das inhomogene Gleichungssystem löst und hieraus die Basisvektoren des Kerns erschließt:

1. **Lösung des inhomogenen Systems:**

Das durch elementare Zeilenumformungen gewonnene Zahlenschema entspricht dem inhomogenen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_5 & = & 3 \\ 4x_3 & - & 2x_5 & + & 4x_6 & + & 4x_7 & = & -2 \\ & & -x_4 & - & 2x_5 & - & x_7 & = & -2 \\ & & & & & & -x_5 & = & -1 \end{array}$$

Bei freier Wahl der Unbekannten x_2, x_6 und x_7 ergibt die Auflösung des Gleichungssystems, beginnend mit der letzten Gleichung, in folgender Reihenfolge $x_5 = 1$, $x_4 = -x_7$, $x_3 = -x_6 - x_7$ und $x_1 = -1 - 2x_2$. Dieses Resultat führt auf die Lösungsmenge

$$\text{Lös}(A, b) = \{(-1 - 2x_2, x_2, -x_6 - x_7, -x_7, 1, x_6, x_7) \mid x_2, x_6, x_7 \in \mathcal{R}\}.$$

2. Basis des Kerns

Die Basis des Kern der Koeffizientenmatrix (= Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems) läßt sich auf Grund des folgenden Satzes unmittelbar aus der vorhin gewonnenen Lösungsmenge erschließen.

Satz 1 *Ist* Lös(A, b) *die Lösungsmenge eines inhomogenen, linearen Gleichungssystems und* v_0 *eine spezielle Lösung, so gilt*

$$\textit{Lös}(A, 0) = \{v - v_0 \mid v \in \textit{Lös}(A, b)\},$$

wobei Lös$(A, 0)$ *die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems bezeichnet.*

Beweis: Da

$$A(v - v_0) = Av - Av_0 = b - b = 0,$$

ist $v - v_0 \in \text{Lös}(A, 0)$. Daß jeder Lösungsvektor des homogenen Systems als Differenz $v - v_0$ mit $v \in \text{Lös}(A, b)$ darstellbar ist, wird aus der Überlegung, daß

$$\forall\, x \in \text{Lös}(A, 0) :\ A(v_0 + x) = Av_0 + Ax = b + 0 = b$$

gilt und somit aus

$$\forall\, x \in \text{Lös}(A, 0) :\ v_0 + x = v \in \text{Lös}(A, b)$$

geschlossen werden kann, daß

$$\forall\, x \in \text{Lös}(A, 0) :\ x = v - v_0$$

ist, evident. ∎

Durch die Wahl von $x_2 = x_6 = x_7 = 0$ gewinnen wir aus der zuvor erhaltenen Lösungsmenge den Lösungsvektor

$$v_0 = (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0).$$

Die Anwendung des soeben bewiesenen Satzes, liefert uns die die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems in der Form

$$\begin{aligned}
\text{Lös}(A, 0) &= \{(-1 - 2x_2, x_2, -x_6 - x_7, -x_7, 1, x_6, x_7) \\
&\qquad - (-1, 0, 0, 0, 1, 0, 0) \mid x_2, x_6, x_7 \in \mathcal{R}\} \\
&= \{(-2x_2, x_2, -x_6 - x_7, -x_7, 0, x_6, x_7) \mid x_2, x_6, x_7 \in \mathcal{R}\} \\
&= \{x_2(-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0) + x_6(0, 0, -1, 0, 0, 1, 0) \\
&\qquad + x_7(0, 0, -1, -1, 0, 0, 1) \mid x_2, x_6, x_7 \in \mathcal{R}\} \\
&= L\left((-2, 1, 0, 0, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 0, 0, 1, 0), (0, 0, -1, -1, 0, 0, 1)\right).
\end{aligned}$$

Die Basisvektoren des Kerns in der letzten Formelzeile stimmen mit den zuvor erhaltenen Basisvektoren erwartungsgemäß überein.