

# Kapitel 6

## Finite Elemente

### Literatur

- K.-J. BATHE, *Finite-Elemente-Methoden*, 2. Aufl., Springer (2002) ISBN 3-540-66806-3
- P. STEINKE, *Finite-Elemente-Methode*, Springer (2004) ISBN 3-540-44226-X

### 6.1 Einleitung

Das Finite-Elemente Verfahren hat im Rahmen der Computersimulation in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen. Es wird in vielen Bereichen des Ingenieurwesens erfolgreich angewandt, hat aber durchaus seinen Platz als wichtiges Werkzeug in vielen Bereichen der angewandten und Grundlagen-Forschung.

Die Finite-Elemente Methode wird angewandt um physikalische Probleme, welche in Berechnungen oder Konstruktionen auftreten können, zu lösen. Der erste Schritt besteht dabei in der Idealisierung des physikalischen Problems auf ein mathematisches Modell, welches zumeist als Satz von Differentialgleichungen formuliert wird. Die Finite-Elemente Methode löst dann dieses mathematische Modell. Das Verfahren ist numerisch, daher ist einerseits eine Festlegung der erforderlichen Genauigkeit, andererseits aber auch die Überprüfung der Rechengenauigkeit erforderlich. Wir erkennen aber, daß der Idealisierung auf ein geeignetes mathematisches Modell entscheidende Bedeutung für die Qualität und Relevanz der Ergebnisse zukommt.

Wir werden in diesem Teil der Vorlesung ‘Computersimulationen’ den Zugang zum idealisierten mathematischen Modell anhand von Beispielen entwickeln, bevor wir die Grundlagen einer Finite-Elemente Lösung dieses Modelles besprechen. Dieses Lösungsverfahren wird dann schließlich am Beispiel der Wärmeleitungsgleichung mit Randbedingungen diskutiert.

Das Finite-Elemente Verfahren selbst wurde aus der Strukturmechanik entwickelt, was zu einer entsprechenden Terminologie geführt hat, welche in anderen Zusammenhängen angewandt ‘fremd’ klingt.

## 6.2 Diskrete mathematische Modelle mit konzentrierten Parametern

Für solche Probleme ist es wesentlich, daß der Zustand des Systems mit ausreichender Genauigkeit durch Werte einer endlichen Zahl von Zustandsgrößen *direkt* beschrieben werden kann. Zur Lösung sind folgende Schritte erforderlich:

- (1) *Idealisierung des Systems*: das vorgegebene System wird als Verbund von Elementen idealisiert.
- (2) *Gleichgewicht am Element*: die Gleichgewichtsbedingungen (bzw. Bewegungsgleichungen) für jedes Element werden unter Verwendung von Zustandsvariablen aufgestellt.
- (3) *Verbund der Elemente*: die Bedingungen für die Verbindung der Elemente untereinander, die Element-Vermaschungsbedingungen, werden dazu herangezogen, um ein Gleichgewichtssystem für die unbekanntenen Zustandsvariablen aufzustellen.
- (4) *Berechnung der Antwort (Reaktion)*: das Gleichungssystem wird nach den Zustandsvariablen aufgelöst und die Antwort für jedes Element unter Verwendung der Gleichgewichtsbedingungen bestimmt.

Wir können des weiteren folgende Problemklassen einführen:

- (a) stationäre Probleme,
- (b) Ausbreitungsprobleme,
- (c) Eigenwertprobleme.

Damit wurden zwar nicht alle, wohl aber die bedeutensten Problemklassen angeführt. Sie decken weitestgehend Probleme der Strukturmechanik, Elektrodynamik, Fluid-Dynamik und Wärmeübertragung ab.

### 6.2.1 Stationäre Probleme

Die Antwort des Systems ändert sich nicht mit der Zeit. Das Gleichungssystem zur Bestimmung der Zustandsvariablen enthält damit die Zeit nicht als Variable.

Wir untersuchen als Beispiel die in Abb. 6.1 dargestellte Wand, welche aus zwei homogenen Platten besteht, welche sich berühren. Im stationären Zustand werden die Temperaturen in der Wand von den Temperaturen  $T_1$  und  $T_3$  an den beiden Außenflächen und der Temperatur  $T_2$  an der Trennfläche bestimmt. Sie sind daher logische Zustandsgrößen. Es sind die durch diese Temperaturen ausgedrückten Gleichgewichtsbeziehungen aufzustellen, wobei

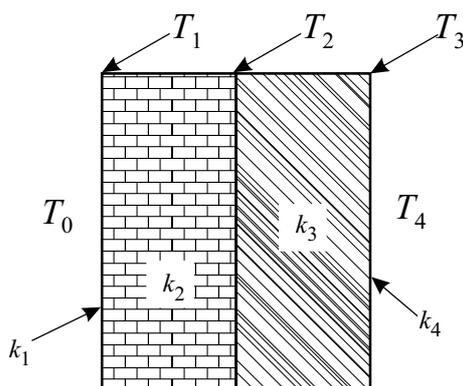


Abbildung 6.1: Geschichtete Platte unter Temperaturrandbedingungen

die Temperaturen  $T_0$  und  $T_4$  bekannt sind. Generell gilt für den Wärmedurchgang

$$\frac{Q}{A} = k\Delta T, \quad (6.1)$$

$Q$  ist dabei der gesamte Wärmestrom,  $A$  die Wandfläche,  $\Delta T$  das Temperaturgefälle in Richtung des Wärmestroms und  $k$  der Durchgangs- bzw. der Übergangskoeffizient. In Abb. 6.1 sind  $k_1$  und  $k_4$  Wärmeübergangskoeffizienten und  $k_2$  und  $k_3$  die Wärmedurchgangskoeffizienten der Plattenmaterialien. (Die beiden Platten seien dabei in idealer Weise aneinander gekoppelt.) Pro Flächeneinheit gelten dann die Element-Gleichgewichtsbeziehungen:

$$\begin{aligned} \text{Linke Oberfläche:} \quad q_1 &= k_1 (T_0 - T_1) \\ \text{Linke Platte:} \quad q_2 &= k_2 (T_1 - T_2) \\ \text{Rechte Platte:} \quad q_3 &= k_3 (T_2 - T_3) \\ \text{Rechte Oberfläche:} \quad q_4 &= k_4 (T_3 - T_4), \end{aligned} \quad (6.2)$$

mit  $q_i = Q_i/A$ . Die Gleichgewichtsbedingung für den Wärmestrom lautet:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 \quad (6.3)$$

und dies ergibt:

$$\begin{aligned} k_1 (T_0 - T_1) &= k_2 (T_1 - T_2) \\ k_2 (T_1 - T_2) &= k_3 (T_2 - T_3) \\ k_3 (T_2 - T_3) &= k_4 (T_3 - T_4). \end{aligned} \quad (6.4)$$

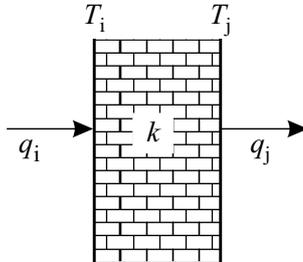
In Matrixform angeschrieben erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 T_0 \\ 0 \\ k_4 T_4 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

oder

$$\mathbf{KT} = \mathbf{f}, \quad (6.6)$$

mit der Koeffizientenmatrix  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{T} = (T_1 \ T_2 \ T_3)$  und  $\mathbf{f} = (k_1 T_0 \ 0 \ k_4 T_4)$ . Die Gleichgewichtsbeziehung (6.6) kann man auch über die *direkte Steifigkeitsmethode* bestimmen. Man geht hier von der typischen Element-Gleichgewichtsbeziehung aus



$$k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_i \\ T_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_i \\ q_j \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

wobei  $q_i, q_j$  die Wärmeströme in das Element und  $T_i$  und  $T_j$  die Element-Endtemperaturen sind. Die direkte Steifigkeitsmethode besagt nun, daß die Gleichgewichtsbeziehung für das Gesamtsystem durch

$$\mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{r} \quad (6.8)$$

gegeben ist, wobei  $\mathbf{r}$  die Randbedingung angibt. Die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{S}$  ist wiederum durch

$$\mathbf{S} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{S}^{(i)} \quad (6.9)$$

bestimmt, wobei die  $\mathbf{S}^{(i)}$  die Elementsteifigkeitsmatrizen sind. Im vorliegenden Fall haben wir zwei wärmeleitende Elemente für welche die Element-Gleichgewichtsbeziehung (6.7) anzuwenden ist. Wir erhalten daher:

$$\begin{pmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in (6.8) ergibt dies:

$$\begin{pmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(T_0 - T_1) \\ 0 \\ k_4(T_4 - T_3) \end{pmatrix}.$$

$T_1$  und  $T_3$  sind Unbekannte und eine entsprechende Umformung ergibt die Gleichgewichtsbeziehung in der Form (6.5).

Es ist insbesondere festzustellen, daß die Matrizen  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{K}$  symmetrische Bandmatrizen sind, welche im allgemeinen auch positiv definit sind. Man kann daher aus der Gleichgewichtsbeziehung (6.6) die Zustandsgröße  $\mathbf{T}$  unmittelbar bestimmen.

Im hier diskutierten Beispiel wurden die systembestimmenden Gleichgewichtsbeziehungen auf *direktem Wege* aufgestellt. Es ist aber von besonderer Bedeutung, daß diese Gleichgewichtsbeziehungen für die Zustandsgrößen auch mit Hilfe von *Extremal- oder Variationsformulierungen* gewonnen werden können. Man spricht dann von einer *schwachen Formulierung*.

Bei einer Extremwertaufgabe ist ein Satz, oder sind Sätze von Werten (Zustandsgrößen)  $U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  so zu bestimmen, daß ein gegebenes Funktional  $\Pi(U_1, \dots, U_n)$  maximal oder minimal wird, oder einen Sattelpunkt hat. Die Gleichungen für die Zustandsvariablen erhält man dann aus der Beziehung

$$\delta\Pi = 0. \quad (6.10)$$

Da weiters

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial U_1}\delta U_1 + \dots + \frac{\partial\Pi}{\partial U_n}\delta U_n$$

gilt, muß

$$\frac{\partial\Pi}{\partial U_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.11)$$

erfüllt sein.  $\delta U_i$  steht dabei für Variationen der Zustandsvariablen  $U_i$ , welche beliebig sind, außer, daß sie an den Rändern entsprechend den Randbedingungen für die Zustandsvariablen verschwinden müssen. Die zweiten Ableitungen von  $\Pi$  nach den Zustandsvariablen entscheiden dann, ob die Lösung einem Maximum, Minimum, oder einem Sattelpunkt entspricht.

Bei der Lösung von Modellen mit konzentrierten Parametern kann man davon ausgehen, daß  $\Pi$  so definiert ist, daß die Bedingungen (6.11) die beherrschenden Gleichgewichtsbeziehungen erzeugen.

## 6.2.2 Ausbreitungsprobleme

Die Antwort des Systems ändert sich mit der Zeit. Es werden aber im wesentlichen dieselben Verfahren wie für die Untersuchung stationärer Systeme angewandt; die Zustandsvariablen und die Element-Gleichgewichtsbeziehungen hängen nun aber von der Zeit ab.

*Pseudo-stationäre* Probleme liegen dann vor, wenn der Einfluß der Zeit auf die Element-Gleichgewichtsbeziehungen vernachlässigbar ist, der Lastvektor aber von der Zeit abhängt. Man erhält dann die Systemantwort aus den Gleichungen, welche das stationäre Problem beschreiben, und anstelle des stationären Lastvektors wird der zeitabhängige Lastvektor gesetzt. Damit wird die stationäre Berechnung für beliebige Zeiten  $t$  ausgeführt. In den wirklichen Ausbreitungsproblemen sind auch die Element-Gleichgewichtsbeziehungen zeitabhängig.

Wir wollen die Problemstellung wieder an Hand eines Beispiels studieren: Bestimmung des Wärmeausgleichstromes in einer Elektronenröhre. Die Geometrie der Anordnung ist aus Abb. 6.2 zu ersehen, während die einzelnen Prozesse in ihrem Zusammenwirken in Abb. 6.3 dargestellt sind.

Ein Heizfaden wird auf die Temperatur  $T_f$  erhitzt; dieser gibt Wärme durch Konvektion an das umgebende Gas ab, aber auch Wärme durch Strahlung an die Glaswand der Röhre. Diese Glaswand erhält aber auch Wärme durch Konvektion aus dem Gas. Schließlich gibt die Glaswand Wärme durch Konvektion an die umgebende Atmosphäre ab, welche die Temperatur  $T_a$

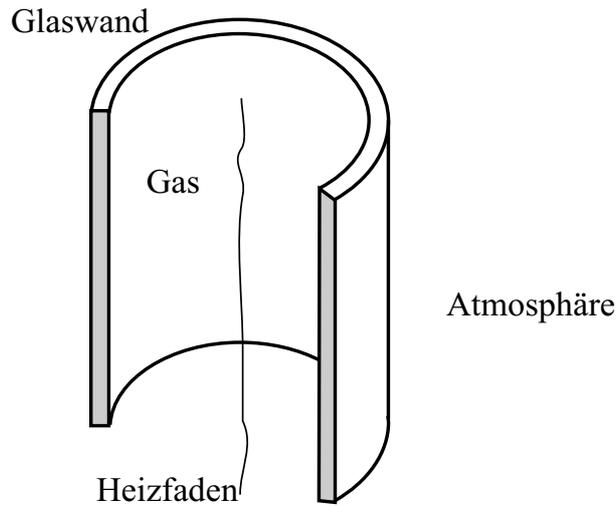


Abbildung 6.2: Wärmeübertragung in einer Elektronenröhre.

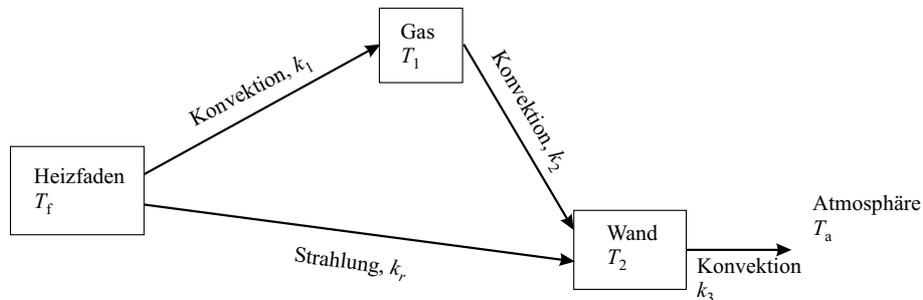


Abbildung 6.3: Blockdiagramm zur Wärmeübertragung in einer Elektronenröhre.

hat. Die Wärmekapazität des Gases sei durch  $C_1$  gegeben und die der Glaswand durch  $C_2$ . Der Wärmeübergangskoeffizient vom Heizfaden zum Gas sei durch  $k_1$  beschrieben, der vom Gas zur Glaswand durch  $k_2$  und der von der Glaswand zur Atmosphäre durch  $k_3$ .

Die Temperaturen  $T_1$  des Gases und  $T_2$  der Glaswand sind die unbekanntesten Zustandsgrößen und die System-Gleichgewichtsbeziehungen ergeben sich aus dem Wärmestromgleichgewicht von Gas und Wand. Damit ergibt sich für das Gas

$$C_1 \frac{d^2 T_1}{dt^2} = k_1(T_f - T_1) - k_2(T_1 - T_2)$$

und für die Glaswand

$$C_2 \frac{d^2 T_2}{dt^2} = k_r(T_f^4 - T_2^4) + k_2(T_1 - T_2) - k_3(T_2 - T_a),$$

wie man aus Abb. 6.3 unschwer entnehmen kann. Diese Gleichungen können zu

$$\mathbf{C}\ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (6.12)$$

zusammengefaßt werden. Hierbei ist

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{pmatrix},$$

und

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} k_1 T_f \\ k_r(T_f^4 - T_2^4) + k_3 T_a \end{pmatrix}.$$

Der nicht zeitabhängige Teil von (6.12) ist dem stationären Ergebnis (6.8) ähnlich. Allerdings haben wir nunmehr, aufgrund der Wärmeübertragung durch Strahlung, ein nicht lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von  $\mathbf{T}$  vorliegen.

### 6.2.3 Eigenwertprobleme

Wir sind zuvor von der Existenz *einer* Lösung für die Antwort des Systems ausgegangen. Ein Kennzeichen von Eigenwertproblemen ist hingegen, daß es nicht nur eine eindeutige Lösung für die Reaktion des Systems gibt, das Ziel ist vielmehr die Ermittlung der verschiedenen möglichen Lösungen. Grundsätzlich treten Eigenwertprobleme sowohl bei statischen als auch bei dynamischen Berechnungen auf.

Das verallgemeinerte Eigenwert-Problem ist von der Form (Eigenwertgleichung)

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{v}, \quad (6.13)$$

mit  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  zwei symmetrischen Matrizen und  $\lambda$  einem Skalar. Erfüllen die Werte  $\lambda_i$  und die Vektoren  $\mathbf{v}_i$  obige Gleichung, so spricht man vom Eigenvektor  $\mathbf{v}_i$  zum Eigenwert  $\lambda_i$ .

In stationären Problemen formuliert man das Eigenwertproblem, wenn man die physikalische Stabilität des Systems untersuchen möchte. Es stellt sich nämlich die Frage: gibt es neben der stationären Lösung des Systems eine weitere Lösung, in welche das System übergehen kann, wenn es in seiner Gleichgewichtslage gestört wird?

Der Grundgedanke wird wieder an einem einfachen Beispiel demonstriert: wir betrachten den in Abb. 6.4 dargestellten elektrischen Schwingkreis. Wir wollen dabei vereinfachend annehmen, daß  $L_1 = L_2 = L$  und  $C_1 = C_2 = C$  ist. Wir bestimmen zunächst die dynamischen Gleichgewichtsbeziehungen und benötigen dazu die Element-Gleichgewichtsbeziehungen. Diese lauten etwa für die Induktivität (Spule)

$$L \frac{dI}{dt} = U, \quad (6.14)$$

und für die Kapazität (Kondensator)

$$I = C \frac{dU}{dt}. \quad (6.15)$$

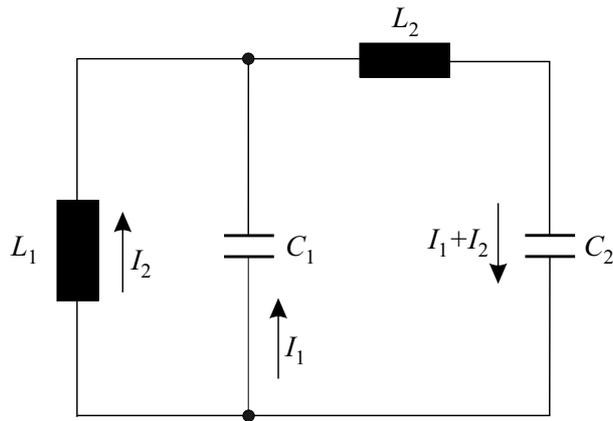


Abbildung 6.4: Elektrischer Schwingkreis

Als Zustandsgrößen dienen die Ströme  $I_1$  und  $I_2$  (siehe Abb. 6.4). Die Gleichgewichtsbeziehung erhält man schließlich aus der Element-Vermaschungsbedingung, in diesem Fall der KIRCHOFFSchen Spannungsregel:

$$\begin{aligned} U_{C_1} + U_{L_2} + U_{C_2} &= 0 \\ U_{L_1} + U_{L_2} + U_{C_2} &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Wir differenzieren (6.14) und (6.15) nach der Zeit und setzen in (6.16) ein. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + 2 \frac{I_1}{C} + \frac{I_2}{C} &= 0 \\ 2L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{I_2}{C} + \frac{I_1}{C} &= 0. \end{aligned}$$

In Matrixform angeschrieben ergibt sich daraus:

$$L \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{I}_1 \\ \ddot{I}_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{C} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

oder kompakt:

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{I}} + \frac{1}{LC} \mathbf{B} \mathbf{I} = 0. \quad (6.17)$$

Der Lösungsansatz

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

ergibt

$$\mathbf{A} \mathbf{I}_0 \sin(\omega t + \varphi) + \underbrace{\frac{1}{LC} \mathbf{B}}_{=\mathbf{K}} \mathbf{I}_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

oder

$$\mathbf{K} \mathbf{I}_0 + \omega^2 \mathbf{A} \mathbf{I}_0 = 0. \quad (6.18)$$

Damit konnten wir die Eigenwertgleichung des Problems auffinden.

## 6.3 Lösung mathematischer Modelle von Kontinuumssystemen

Der Weg zur Lösung ist ähnlich jenem, welcher im vorhergehenden Abschnitt behandelt wurde. Wir haben jetzt aber anstelle von diskreten Elementen differentielle Modelle vorliegen. Unser Ziel ist es Differentialgleichungen zu gewinnen, welche die Element-Gleichgewichtsbeziehungen, die konstruktiven Beziehungen und die Bedingungen für den Elementverbund ausdrücken. Diese Differentialgleichungen müssen im gesamten Bereich, welchen das System einnimmt, gelten. Sie müssen durch Randbedingungen (*Randwertproblem*) und für dynamische Untersuchungen auch durch Anfangsbedingungen (*Anfangswertproblem*) ergänzt werden.

Die systembeherrschenden Differentialgleichungen können mit Hilfe von zwei verschiedenen Verfahren erzeugt werden:

- direkte Methode (differentielle Formulierung),
- Variationsmethode.

### 6.3.1 Differentielle Formulierung

In dieser Formulierung werden die Gleichgewichtsbedingungen und die konstruktiven Gleichungen für ein typisches differentielles Element in den Zustandsgrößen aufgestellt. Dies führt zu einem System von Differentialgleichungen in den Zustandsgrößen. Vervollständigt wird die Formulierung des Problem es schließlich mit der Aufstellung aller Randbedingungen und, in dynamischen Untersuchungen, auch Anfangsbedingungen. Zusätzliche Differentialgleichungen beschränken die Zustandsgrößen derart, daß alle Kompatibilitätsbedingungen erfüllt werden.

Für die mathematische Behandlung ist es zweckmäßig die problembeherrschende Differentialgleichung zu klassifizieren. Dazu wird die im Bereich  $(x, y)$  definierte allgemeine partielle Differentialgleichung

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi \left( x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (6.19)$$

betrachtet, in der  $u = u(x, y)$  die unbekannte Zustandsgröße ist. Je nach ihren Koeffizienten bezeichnet man die Differentialgleichung (6.19) als

$$B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{elliptisch,} \\ = 0 & \text{parabolisch,} \\ > 0 & \text{hyperbolisch.} \end{cases}$$

In ihrer jeweils einfachsten Form können diese drei Typen mit der LAPLACESchen Gleichung, der Wärmeleitungsgleichung und der Wellengleichung identifiziert werden.

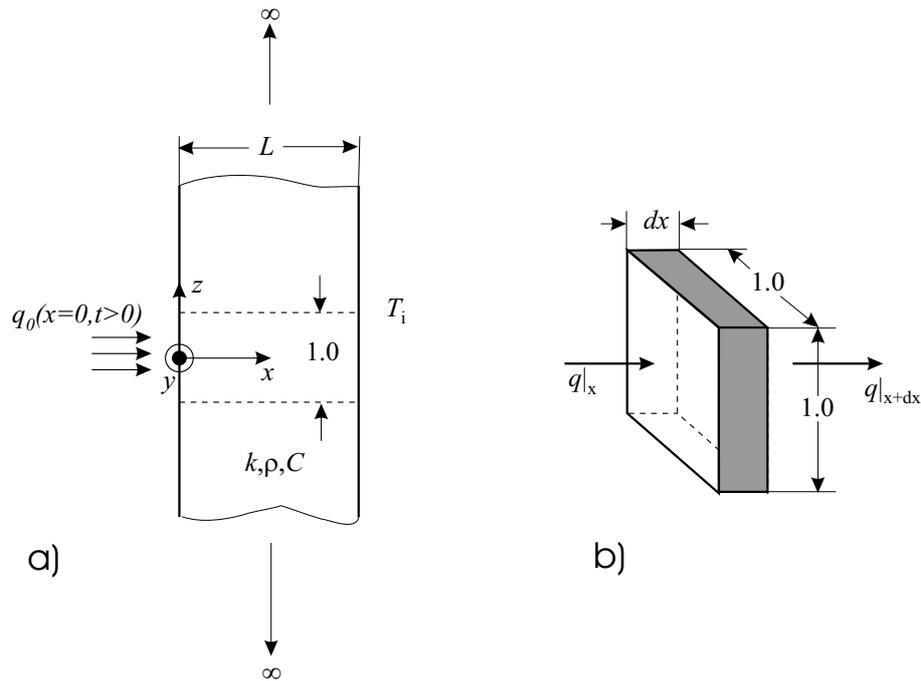


Abbildung 6.5: Eindimensionales Wärmeleitungsproblem. a) Gesamtanordnung, b) infinitesimales Streifenelement.

Wir wollen wieder das Entstehen der problembeherrschenden Differentialgleichung an einem einfachen Beispiel diskutieren: in Abb. 6.5a ist ein sehr langer Plattenstreifen dargestellt. Er ist durch eine konstante Wärmeleitfähigkeit  $k$ , durch die Massendichte  $\rho$  und durch die Wärmekapazität  $C$  pro Einheitsmasse charakterisiert. Er hat eine konstante Anfangstemperatur  $T_i$ . Er wird plötzlich zur Zeit  $t = 0^+$  von einem konstanten, gleichförmigen Wärmestrom  $q_0(x = 0, t > 0)$  getroffen. Die Plattenoberfläche bei  $x = L$  wird auf der Temperatur  $T_i$  gehalten. Wir nehmen an, daß der Wärmestrom eindimensional ist.

Die Element-Gleichgewichtsbeziehung für das differentielle Element (siehe Abb. 6.5b) des Plattenstreifen ergibt sich aus der Forderung, daß die Differenz des ein- und auslaufenden Wärmestroms gleich der im Element gespeicherten Wärmemenge ist:

$$A q|_x - \left( qA|_x + A \frac{\partial q}{\partial x} \Big|_x dx \right) = \rho AC \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_x dx. \quad (6.20)$$

Die konstitutive Gleichung ist hier das FOURIERSche Wärmeleitungsgesetz

$$q = -k \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (6.21)$$

Wir setzen dies in (6.20) ein und erhalten mit

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.22)$$

die Wärmeleitungsgleichung. (Wir haben hier, stillschweigend, vorausgesetzt, daß  $T$  eine zweifach differenzierbare Funktion von  $x$  ist.) Es gelten die *Randbedingungen*:

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial t} = -\frac{q_0(0, t)}{k}, \quad t > 0 \quad (6.23)$$

und

$$T(L, t) = T_i, \quad (6.24)$$

für alle Zeiten. Schließlich haben wir noch die *Anfangsbedingung*:

$$T(x, t = 0) = T_i, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (6.25)$$

Somit wurde das Problem vollständig definiert.

Es sei hier noch angemerkt, daß parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen im Gegensatz zu den elliptischen die Zeit als unabhängigen Parameter enthalten. Sie kennzeichnen also Ausbreitungsprobleme.

### 6.3.2 Variationsformulierung

Es ist das Gesamtpotential  $\Pi$  gegeben, welches auch das Funktional des Problems genannt wird. Ist in einem solchen Funktional die höchste Ableitung einer Zustandgröße nach einer Raumkoordinate von  $m$ -ter Ordnung, so spricht man von einem  $C^{m-1}$ -Variationsproblem. Es gibt des weiteren zwei Klassen von Randbedingungen, die *wesentlichen* und die *natürlichen* Randbedingungen.

Die wesentlichen Randbedingungen heißen auch oft *geometrische* Randbedingungen, weil sie Verschiebungen oder Verdrehungen entsprechen, oder DIRICHLETSche Randbedingungen. Die Ordnung der Ableitungen in den wesentlichen Randbedingungen beträgt  $C^{m-1}$ -Problemen höchstens  $m - 1$ .

Die natürlichen Randbedingungen heißen auch oft *dynamische* Randbedingungen, *Kraft*-Randbedingungen, oder VON NEUMANN Randbedingungen. Die höchsten Ableitungen nach Raumkoordinaten, welche in solchen Randbedingungen auftreten können sind von  $m$ -ter bis  $(2m - 1)$ -ter Ordnung. Sie sind Bestandteil des Funktionals  $\Pi$ .

Zur Demonstration verwenden wir wieder das vorhergehende Beispiel des sehr langen Plattenstreifens nach Abb. 6.5a. Das Funktional, welches die Temperaturverteilung regelt sei durch

$$\Pi = \int_0^L dx \frac{1}{2} k \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 - \int_0^L dx q^B T - T_0 q_0 \quad (6.26)$$

gegeben, mit  $T_0 = T(0, t)$ . Der Term  $q_0 T_0$  ist dabei die VON NEUMANN Randbedingung. Weiters haben wir noch die wesentliche Randbedingung:

$$T(L, t) = T_L = T_i, \quad (6.27)$$

und  $q^B$  ist die pro Einheitsvolumen erzeugte Wärmemenge. Aus der Forderung, daß  $\Pi$  stationär sein muß erhält man die Bestimmungsgleichung und die natürliche Randbedingung in expliziter Formulierung.

Es handelt sich hier offensichtlich um ein  $C^0$ -Problem. Die wesentliche Randbedingung kann sich daher nur auf eine vorgegebene Temperatur beziehen [vgl. (6.27)]; die natürliche Randbedingung muß hingegen einem Temperaturgradienten oder einem Randwärmestrom entsprechen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= 0 \\ &= \int_0^L dx \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) \left( \delta \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \int_0^L dx q^B \delta T - q_0 \delta T,\end{aligned}$$

wobei

$$\delta \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \delta T$$

gilt. Partielle Integration führt zu

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= - \int_0^L dx \delta T \left( k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q^B \right) + k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} \delta T_L - \left[ k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_0 \right] \delta T_0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Die Variation der wesentlichen Randbedingungen ist Null, also ist  $\delta T_L = 0$ . Nehmen wir nun weiter an, daß  $\delta T_0 = 0$ , aber sonst  $\delta T \neq 0$ , folgt unmittelbar

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + q^B = 0. \quad (6.28)$$

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß  $\delta T = 0$ ,  $\forall x \neq 0$  und  $\delta T \neq 0$  für  $x = 0$  gelte. Dies ergibt

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_0 = 0, \quad (6.29)$$

was der natürlichen Randbedingung (FOURIERSches Wärmeleitungsgesetz) entspricht. Setzen wir schließlich

$$q^B = -\rho C \frac{\partial T}{\partial t},$$

so folgt die Wärmeleitungsgleichung (6.21). Bis zu diesem letzten Schritt haben wir aber das Problem so behandelt als wäre es ein stationäres Problem. Die Zeitabhängigkeit von  $q^B$  wandelt das Problem in ein quasistationäres um.

Die hier vorgestellten Überlegungen führen notwendig zur Frage, wie man das Funktional eines Problem es aufstellen kann. Zunächst ist es unschwer festzustellen, daß  $\Pi$  die LAGRANGE-Funktion des Problem es ist, und daß  $\delta\Pi = 0$  dem Grundprinzip der Minimalisierung der freien Energie, wie sie im HAMILTON-LAGRANGE-Formalismus der analytischen Mechanik formuliert

ist, entspricht. Üblicher Weise geht man bei der Aufstellung der LAGRANGE-Funktion von der Differentialgleichung aus, welche das System beschreibt. Man formt diese in eine Integralgleichung um und benützt das so gefundene Ergebnis um einen Ansatz für die LAGRANGE-Funktion zu entwickeln. Die Variation  $\delta\Pi = 0$  muß dann wieder zur bestimmenden Differentialgleichung führen. Da dieser Prozess aber nicht eindeutig ist, kann man oft mehrere Funktionale definieren, welche für ein und dasselbe Problem gleich gut geeignet sind.

Hat man aber einmal für eine bestimmte Klasse von Problemen das Funktional aufgestellt, so kann man es dazu verwenden die beherrschende Differentialgleichung für *alle* Probleme dieser Klasse aufzustellen. Das Funktional ist also ein umfassend einsetzbares analytisches Werkzeug. Vom Gesichtspunkt der "Nützlichkeit" kann man festhalten:

1. Die Variationsmethode kann einen relativ einfachen Weg zur Aufstellung der bestimmenden Differentialgleichung eines Systemes bieten. Die Ursache liegt darin, daß im Variationsformalismus eher skalare Größen (wie Energie, Potentiale, etc.) und nicht Vektorgrößen betrachtet werden.
2. Ein Variationsverfahren kann auf direktem Weg zu den systembeherrschenden Gleichungen und den Randbedingungen führen. Man muß einige Variable, welche in einer direkten Formulierung einbezogen werden müssen, in einer Variationsformulierung nicht berücksichtigen, wie etwa innere Kräfte, welche keine äußere Arbeit leisten.
3. Zur Ermittlung von Näherungslösungen kann bei Variationsformulierungen eine größere Klasse von Ansatzfunktionen verwendet werden, als für die differentielle Formulierung; nachdem die natürlichen Randbedingungen im Funktional enthalten sind, müssen die Ansatzfunktionen diese natürlichen Randbedingungen nicht befriedigen.

### 6.3.3 Lösungsverfahren

Will man nun die Lösung komplexer Probleme aufsuchen, so muß man zur Lösung Näherungsverfahren anwenden. Grundsätzlich haben wir die differentielle Formulierung eines stationären Problems in der Form

$$\hat{D}\varphi = r, \text{ in } \mathcal{G} \subset \mathbb{R}^4 \quad (6.30)$$

vorliegen, wobei  $\hat{D}$  ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $2m$  ist (Definitionsbereich  $\mathcal{G}$ ),  $\varphi$  ist die zu bestimmende Zustandsgröße und  $r$  die Erregerfunktion. Die Lösung des Problems muß auch die Randbedingungen

$$\hat{B}_i\varphi = q_i|_{\text{am Rand } S_i}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (6.31)$$

enthalten, mit Operatoren  $\hat{B}_i$ , welche auf  $\varphi$  wirkend den Randwert  $q_i$  ergeben. Bei physikalisch relevanten Problemen werden die Operatoren  $\hat{D}$  symmetrisch und positiv definit sein, es wird also die Symmetriebedingung

$$\int_{\mathcal{G}} d\mathcal{G} (\hat{D}u) v = \int_{\mathcal{G}} d\mathcal{G} (\hat{D}v) u,$$

und die Bedingung der positiven Bestimmtheit

$$\int_{\mathcal{G}} d\mathcal{G} u (\hat{D}u) > 0$$

gelten.  $u$  und  $v$  sind hier beliebige Funktionen, welche homogene wesentliche und natürliche Randbedingungen erfüllen.

Das Verfahren der *gewichteten Residuen* oder das RITZsche Verfahren geht von einer Lösung der Form

$$\bar{\varphi} = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad (6.32)$$

aus, wobei der Satz  $\{f_i | i = 1, 2, \dots, n\}$  ein Satz linear unabhängiger Ansatzfunktionen ist und die  $a_i$  sind die zu bestimmenden Entwicklungskoeffizienten.

Im Verfahren der gewichteten Residuen wählt man die Funktionen  $f_i$  derart, daß sie die Randbedingungen (6.31) erfüllen und berechnet das Residuum

$$R = r - \hat{D} \left[ \sum_{i=1}^n a_i f_i \right]. \quad (6.33)$$

Für die exakte Lösung gilt  $R = 0$ . Im allgemeinen werden die  $a_i$  so bestimmt, daß ein gewichtetes Mittel von  $R$  verschwindet.

Im GALERKIN-Verfahren, eine Variante obigen Verfahrens, werden die Parameter  $a_i$  aus den  $n$  Gleichungen

$$\int_{\mathcal{G}} d\mathcal{G} f_i R = 0 \quad (6.34)$$

bestimmt. Dies ist allerdings unhandlich, da die Ansatzfunktionen  $2m$ -fach differentierbar sein müssen.

### 6.3.4 Einführung in die Finite-Elemente Lösung

Wir untersuchen hierzu beispielhaft das in Abb. 6.6a dargestellte Problem. Wir führen als Zustandsgröße die Verschiebung  $u(x, t)$  ein, welche der Stab vom Querschnitt  $A$  unter dem Einfluß der Streckenlast  $f^B(x) = ax$  und der

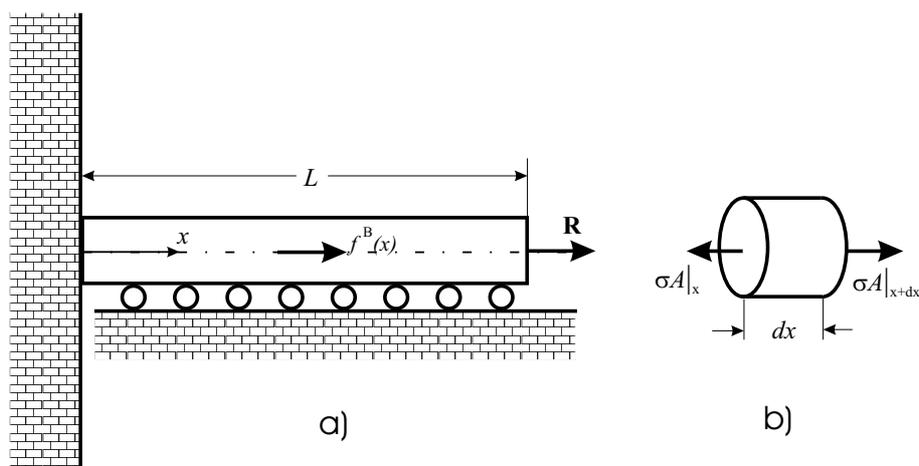


Abbildung 6.6: Gleichförmiger Stab unter der Streckenlast  $f^B(x)$  und Endlast  $\mathbf{R}$

Endlast  $\mathbf{R}$  erleidet. Diese Endlast wird für Zeiten  $t > 0$  'eingeschaltet'. Das Stabmaterial sei durch den Elastizitätsmodul  $E$  gekennzeichnet.

Nach dem D'ALEMBERTSchen Prinzip lautet das Element-Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Stabelement (siehe Abb. 6.6b):

$$\begin{aligned} \sigma A|_{x+dx} - \sigma A|_x &= \sigma A|_x + A \left. \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|_x dx - \sigma A|_x \\ &= \rho A \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_x dx. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Die konstitutive Gleichung ist

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (6.36)$$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx &= \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{aligned}$$

und mit  $c = \sqrt{E/\rho}$  erhalten wir die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (6.37)$$

als systembestimmende Differentialgleichung. Die Vermaschungsbeziehung ist erfüllt, da  $u(x, t)$  als kontinuierliche Funktion von  $x$  angenommen wurde.

Die Randbedingungen sind

$$u(0, t) = 0, \text{ der Stab ist bei } x = 0 \text{ eingespannt}$$

$$EA \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = R(t), \quad t > 0, \quad (6.38)$$

und die Anfangsbedingungen lauten:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (6.39)$$

Konzentrieren wir uns auf das stationäre Problem, so finden wir die *differentielle Formulierung*:

$$EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B = 0, \quad (6.40)$$

$$u(x=0) = 0 \quad (6.41)$$

$$EA \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_L = R, \quad (6.42)$$

mit  $R$  nunmehr als Betrag einer stationären Endkraft. Mit der Streckenlast  $f^B(x) = ax$  erhält man die Lösung:

$$u(x) = \frac{(R + aL^2/2)x - (ax^3/6)}{EA}. \quad (6.43)$$

(6.40) gewährleistet das Gleichgewicht in jedem Punkt  $x$  des Stabes, (6.41) ist die wesentliche (geometrische) Randbedingung und (6.42) ist die natürliche (Kraft-)Randbedingung.  $u(x)$  ist eine stetige, zweifach differenzierbare Funktion. Verallgemeinernd kann man sagen, daß die Lösung von (6.40), (6.41) und (6.42) für jede kontinuierliche Last  $f^B(x)$  im Raum der stetigen und zweifach differenzierbaren Funktionen, welche (6.41) und (6.42) erfüllen, liegt.

Eine *Variationsformulierung* ergibt das Funktional

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L dx EA \left[ \frac{du(x)}{dx} \right]^2 - \int_0^L dx u(x) f^B(x) - Ru(x=L) \quad (6.44)$$

und daraus folgt:

$$\delta \Pi = 0 \quad (6.45)$$

$$u(x=0) = 0 \quad (6.46)$$

$$\delta u(x=0) = 0. \quad (6.47)$$

Die Beziehungen (6.44), (6.45), (6.46) und (6.47) sowie (6.40), (6.41) und (6.42) sind vollkommen äquivalent. Fordert man nämlich (6.45), integriert partiell und verwendet (6.47), so ergibt sich (6.40) bis (6.42).  $\delta u(x)$  ist eine beliebige Variation von  $u(x)$ , welche der Bedingung  $\delta u(x=0) = 0$  gehorcht; man kann daher  $\delta u(x)$  als eine beliebige kontinuierliche Funktion auffassen, welche die Bedingung (6.47) erfüllt.

Die Variationsformulierung kann aber auch unschwer aus der differentiellen Formulierung abgeleitet werden. (6.40) ist für alle Punkte des Stabes gültig und damit gilt auch

$$\left[ EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + f^B(x) \right] \delta u(x) = 0,$$

mit  $\delta u(x)$  einer beliebigen Variation von  $u(x)$  (oder einer beliebigen stetigen Funktion) mit  $\delta u(x=0) = 0$ . Es gilt dann auch

$$\int_0^L dx \left[ EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + f^B(x) \right] \delta u(x) = 0;$$

partielle Integration ergibt:

$$EA \int_0^L dx \frac{d\delta u(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} = \int_0^L dx f^B(x) \delta u(x) + EA \frac{du(x)}{dx} \delta u(x) \Big|_0^L.$$

Wir verwenden die Randbedingung (6.42) und erhalten

$$EA \int_0^L dx \frac{d\delta u(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} = \int_0^L dx f^B(x) \delta u(x) + R \delta u(x) \Big|_{x=L} \quad (6.48)$$

mit

$$u(x=0) = 0, \quad \delta u(x=0) = 0.$$

Dieses so erhaltene Ergebnis wird auch das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* (Prinzip der virtuellen Arbeit) genannt. (6.48) kann man natürlich auch als

$$\delta \left\{ \int_0^L dx \left[ \frac{EA}{2} \left( \frac{du(x)}{dx} \right)^2 - f^B(x) u(x) \right] - Ru(x=L) \right\} = 0$$

schreiben, was dann wieder der Variationsaussage (6.45) entspricht.

Alle drei Formulierungen sind einander äquivalent, das heißt, daß die Lösung  $u(x)$  nach (6.43) die eindeutige Lösung ist. Wir sehen aber, daß die Variationsformulierung und das Prinzip der virtuellen Arbeit nur erste Ableitungen der Funktionen  $\delta u(x)$  und  $u(x)$  enthalten. Der Funktionenraum,

in welchem nach einer Lösung gesucht wird, ist jetzt größer als der für die Lösung von (6.40) verwendete. Es stellt sich somit die Frage ob es bedeutsam und wichtig ist, wenn man zur Lösung des Problemes unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Arbeit einen größeren Funktionenraum verwendet. (Natürlich enthält dieser erweiterte Funktionenraum vollständig jenen Funktionenraum, welcher bei der differentiellen Beschreibung verwendet wurde.)

Es können im vorliegenden Beispiel, und natürlich im allgemeinen Fall, zusätzliche Bedingungen dort auftreten, wo Einzelkräfte wirken, oder Sprünge in den Materialeigenschaften oder im Querschnittsverlauf vorliegen. Mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit werden diese unmittelbar in die Lösung einbezogen. An solchen Stellen ist die erste Ableitung von  $u(x)$  unstetig. Im Fall der differentiellen Formulierung wird man jeden Abschnitt des Stabes getrennt behandeln und die aneinander grenzenden Abschnitte durch Rand- und Übergangsbedingungen verknüpfen. Deshalb sind Variationsformulierungen und das Prinzip der virtuellen Arbeit in diesen Fällen die etwas direkteren und leistungsfähigeren Lösungsverfahren.

Alle diese Überlegungen haben auf ein allgemeines Verfahren zur Formulierung einer numerischen Lösung unseres Problemes geführt. Wir ersetzen  $\delta u(x)$  durch die Testfunktion  $v(x)$  und finden

$$\int_0^L dx \left[ EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + f^B(x) \right] v(x) = 0, \quad (6.49)$$

mit  $u(x=0) = v(x=0) = 0$ . Dies ergibt nach partieller Integration

$$EA \int_0^L dx \frac{dv(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} = \int_0^L dx f^B(x)v(x) + Rv(x=L). \quad (6.50)$$

Dies ist eine Anwendung des Verfahrens nach GALERKIN in Zusammenhang mit dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Sie besagt: *Wenn  $u(x)$  die Lösung des Problemes sein soll, dann muß die linke Seite von (6.50), also die innere virtuelle Arbeit, gleich der rechten Seite von (6.50), der äußeren virtuellen Arbeit für beliebige Testfunktionen  $v(x)$  (oder virtuelle Verschiebungsfunktionen) sein. Diese sind stetig und erfüllen die Bedingung  $v(x=0) = 0$ . Wir können also formulieren:*

$$\text{Finde } u(x) \in \mathcal{V} \text{ so, daß } a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (6.51)$$

$\mathcal{V}$  ist dabei der Funktionenraum,  $a(u, v)$  eine bilineare und  $f(v)$  eine lineare Form des Problems. Der Funktionenraum  $\mathcal{V}$  ist dabei durch

$$\mathcal{V} = \left\{ v \mid v \in L^2(L), \frac{dv}{dx} \in L^2(L), v(x=0) = 0 \right\} \quad (6.52)$$

gegeben, wobei  $L^2(L)$  der Raum der über die Stablänge ( $0 \leq x \leq L$ ) quadratintegrierbaren Funktionen ist. In unserem speziellen Fall findet man durch

Vergleich mit (6.50)

$$a(u, v) = \int_0^L dx \frac{dv(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx}$$

$$f(v) = \int_0^L dx f^B(x)v(x) + Rv(x=L).$$

Weiters verlangt die Definition des Funktionenraums  $\mathcal{V}$ , daß für jedes  $v \in \mathcal{V}$

$$v(x=0) = 0, \quad \int_0^L v^2(x) < \infty, \quad \text{und} \quad \int_0^L dx \left[ \frac{dv(x)}{dx} \right]^2 < \infty$$

gelten muß.

Für die GALERKINSche, oder Finite-Elemente Lösung wird der Raum der Test- oder Finite-Elemente-Funktionen  $\mathcal{V}_h$  als

$$\mathcal{V}_h = \left\{ v_h \mid v_h \in L^2(L), \frac{dv_h}{dx} \in L^2(L), v_h|_{\mathcal{S}_h} = 0 \right\} \quad (6.53)$$

definiert. Dabei bezeichnet  $\mathcal{S}_h$  die Oberfläche, auf welcher die Nullverschiebung vorgegeben ist. Der Index  $h$  soll darauf hinweisen, daß eine ganz bestimmte Finite-Elemente Diskretisierung vorliegt, wobei sich  $h$  auf die ‘‘Größe’’ der Elemente bezieht. Somit lautet die Finite-Elemente Formulierung oder *schwache Formulierung* des Problems:

$$\text{Finde } u_h(x) \in \mathcal{V}_h \text{ so, daß } a(u_h, v_h) = f(v_h) \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h. \quad (6.54)$$

Dies ist wieder das Prinzip der virtuellen Arbeit angewandt unter Verwendung der in  $\mathcal{V}_h$  enthaltenen Testfunktionen. Es entspricht auch der Minimalisierung der gesamten potentiellen Energie im Raum der Testfunktionen.

Ganz allgemein findet man, wenn man dem hier beispielhaft vorgezeichneten Weg folgt, das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* für allgemeine Berechnungen von Festkörpern und Strukturen, das *Prinzip der virtuellen Temperaturen* für allgemeine Wärmestrom- und Temperaturberechnungen von Festkörpern und das *Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten* für allgemeine strömungsmechanische Berechnungen.

### 6.3.5 Finite-Differenzen Verfahren

In Finite-Differenzen Verfahren werden die Differenzialquotienten näherungsweise durch Differenzenquotienten ersetzt. Wir betrachten wieder den Stab aus Abb. 6.6 und das Problem wird von der Differentialgleichung

$$\underbrace{\frac{d^2 u(x)}{dx^2}}_{=u''(x)} + \frac{f^B(x)}{EA} = 0$$

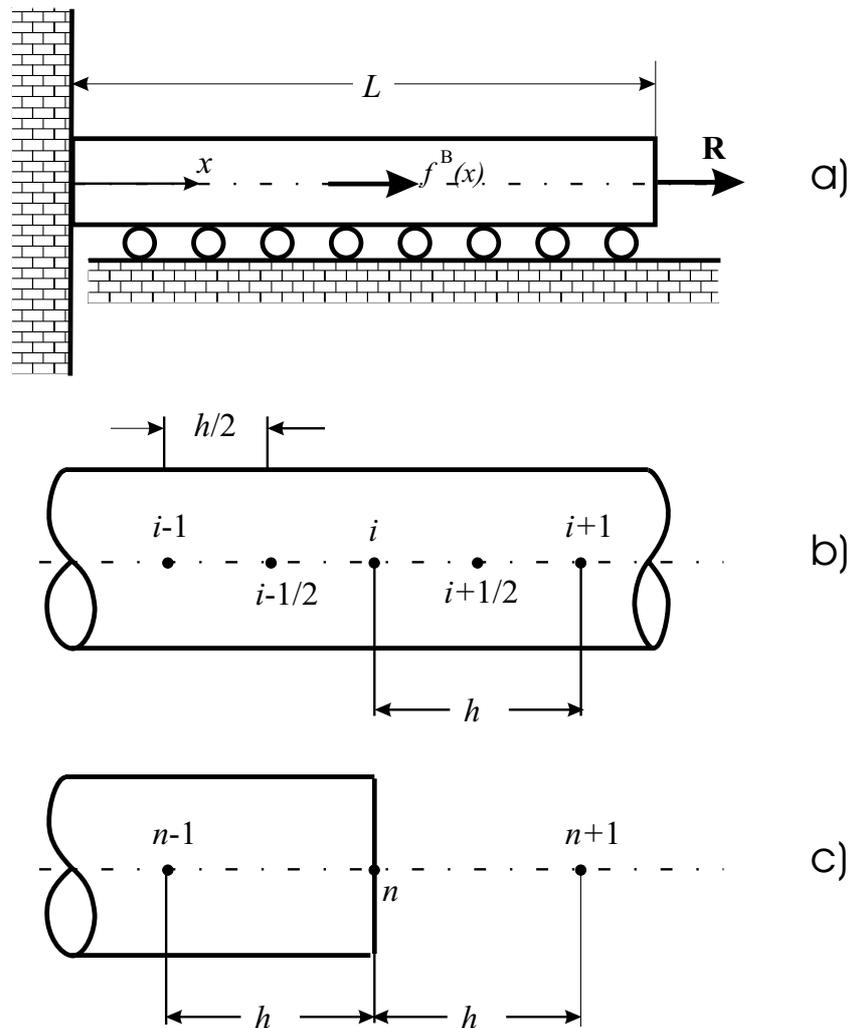


Abbildung 6.7: Berechnung eines Stabes mit der Methode der finiten Differenzen. a) Zu berechnender Stab. b) Finite-Differenzen Gitterpunkte  $i - 1$ ,  $i$ ,  $i + 1$ , (die Punkte  $i - \frac{1}{2}$ ,  $i + \frac{1}{2}$  sind keine Gitterpunkte). c) Fiktiver Gitterpunkt  $n + 1$  außerhalb des Stabes.

bestimmt. Es gelten die Randbedingungen

$$u(x = 0) = 0, \quad EA u'(x)|_x = L = R.$$

Mit gleich großer Schritt- oder Maschenweite  $h$  zwischen Finite-Differenzen Gitterpunkten (siehe Abb. 6.7b) kann für den vorderen bzw. hinteren (ersten) Differenzenquotienten

$$u'|_{i+\frac{1}{2}} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}, \quad u'|_{i-\frac{1}{2}} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h}$$



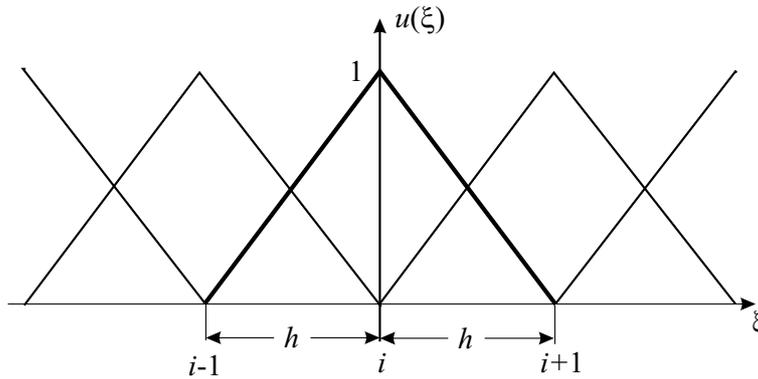


Abbildung 6.8: Typische RITZsche oder GALERKINSche Basisfunktion zur Verwendung in Stabproblemen

und speziellen RITZschen ‘Hut’-Funktionen (Abb. 6.8)

$$u(\xi) = \begin{cases} (1 - \frac{\xi}{h}) u_i & 0 \leq \xi \leq h \\ (1 + \frac{\xi}{h}) u_i & -h \leq \xi \leq 0 \end{cases}$$

angewandt wird.

## 6.4 Die Finite-Element Gleichungen

### 6.4.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Der in Abb. 6.9 dargestellte, beliebig geformte Körper befindet sich in einem stationären Koordinatensystem  $x, y, z$ . Er stützt sich auf die Fläche  $S_u$  und die Verschiebungen  $\mathbf{U}^{S_u}$  sind vorgegeben. (Sie sind zumeist gleich Null, es könnte aber auch ein Rollenlager vorgesehen sein, welches Verschiebungen in eine Richtung zuläßt.) Die Oberfläche  $S_f$  ( $S_f \cap S_u = 0$ ) ist Oberflächenspannungen  $\mathbf{f}^{S_f}$  ausgesetzt. (Kräfte pro Flächeneinheit) Die Gesamtfläche ist durch  $S = S_f \cup S_u$  gegeben. Als äußere Lasten wirken auf den Körper Volumenskräfte  $\mathbf{f}^B$  (Kräfte pro Einheitsvolumen) und auch Einzelkräfte  $\mathbf{R}^i$ , welche den Angriffspunkt  $i$  haben. In Komponentenschreibweise gelte

$$\mathbf{f}^B = \begin{pmatrix} f_x^B \\ f_y^B \\ f_z^B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^{S_f} = \begin{pmatrix} f_x^{S_f} \\ f_y^{S_f} \\ f_z^{S_f} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}^i = \begin{pmatrix} R_x^i \\ R_y^i \\ R_z^i \end{pmatrix},$$

wobei die Komponenten selbst wieder Funktionen von  $x, y$  und  $z$  sind.

Die Verschiebungen des Körpers aus der unbelasteten Konfiguration werden durch den Verschiebungsvektor

$$\mathbf{U}^T = (U_x, U_y, U_z)$$

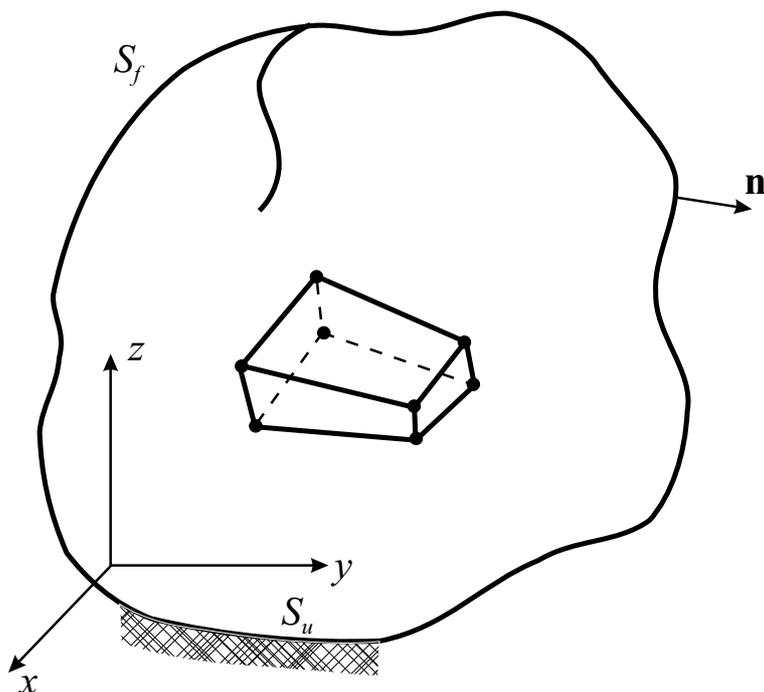


Abbildung 6.9: Beliebige geformter Körper mit einem dreidimensionalen Acht-Knoten Element

beschrieben. Auf der Oberfläche sind die entsprechenden Verschiebungen durch Vektoren  $\mathbf{U}^{S_f}$  beschrieben. Den Verschiebungen  $\mathbf{U}$  entsprechen Verzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}) \quad (6.57)$$

mit

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \quad \text{und} \quad \gamma_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}, \quad i, j = x, y, z. \quad (6.58)$$

Diesen Verzerrungen entsprechen die Spannungen

$$\boldsymbol{\tau}^T = (\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}) \quad (6.59)$$

mit

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}^I. \quad (6.60)$$

$\mathbf{C}$  ist dabei die Spannungs-Verzerrungs-Materialmatrix und der Vektor  $\boldsymbol{\tau}^I$  erfaßt vorgegebene Anfangsspannungen; er ist in den Komponenten wie (6.59) geordnet.

Es ist folgendes Problem zu lösen:

- *Gegeben* ist die Geometrie des Körpers, die Belastungen  $\mathbf{f}^{S_f}$ ,  $\mathbf{f}^B$ ,  $\mathbf{R}^i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , die Art der Lagerung auf  $S_u$ , das Spannungs-Verzerrungsgesetz des Materials,  $\mathbf{C}$ , und der Anfangsspannungszustand  $\boldsymbol{\tau}^I$ .
- *Zu berechnen* sind die Verschiebungen  $\mathbf{U}$  des Körpers und daraus die Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  und die Spannungen  $\boldsymbol{\tau}$ .

Bei der Lösung wird geometrische und materielle Linearität vorausgesetzt, was bedeutet, daß die Verschiebungen infinitesimal sein sollen, sodaß (6.58) gilt, und daß das Gleichgewicht des Körpers bezüglich der unbelasteten Konfiguration aufgestellt (und gelöst) werden kann. Die Elemente von  $\mathbf{C}$  können Funktionen von  $x, y, z$  sein, sie sind aber sonst konstant und vom Spannungszustand unabhängig. (Dies vereinfacht die Rechnung ist aber keine notwendige Voraussetzung. Man kann auch Finite-Elemente Verfahren für nicht lineare Probleme entwickeln.)

Will man die Reaktion des Körpers bestimmen, so muß man die beherrschenden Differentialgleichungen aufstellen und unter Berücksichtigung der Randbedingungen lösen, was im allgemeinen nur für einfache Geometrien möglich ist. Wir wenden also, wie schon diskutiert, das Prinzip der virtuellen Verschiebungen auf den Körper von Abb. 6.9 an. Zur Vereinfachung wollen wir zunächst annehmen, daß die Oberfläche frei von Einzellasten  $\mathbf{R}^i$  sei (bzw. daß die Einzellasten in den Komponenten von  $\mathbf{f}^{S_f}$  enthalten sind. Die Lösung unseres Problems muß die Differentialgleichung

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i^B = 0 \quad (6.61)$$

im ganzen Körper erfüllen, mit  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, f_1^B = f_x^B$ , etc. und  $\tau_{11} = \tau_{xx}$ , etc. Es gelten die natürlichen (Kraft-)Randbedingungen

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} n_j = f_i^{S_f} \in S_f \quad (6.62)$$

mit  $n_i$  den Komponenten des Flächennormalvektors  $\mathbf{n}$  auf die Oberfläche  $S_f$ . Weiters gilt die wesentliche Randbedingung

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{S_u} \in S_u. \quad (6.63)$$

Wir betrachten nun *beliebig* gewählte kontinuierliche Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$ , welche

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \in S_u \quad (6.64)$$

erfüllen. Es gilt weiters wegen (6.61)

$$\sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i^B \right] \bar{u}_i = 0$$

und auch

$$\int_V dV \sum_{i=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i^B \right] \bar{u}_i = 0. \quad (6.65)$$

Da die virtuellen Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$  beliebig sind, ist (6.64) nur gültig, wenn die eckige Klammer im Integranden verschwindet und damit ist (6.64) äquivalent (6.61). Wir verwenden nun

$$\sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} \bar{u}_i) = \sum_{i,j} \left( \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \bar{u}_i + \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right)$$

und damit folgt für (6.65):

$$\int_V dV \sum_i \left\{ \sum_j \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} \bar{u}_i) - \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right] + f_i^B \bar{u}_i \right\} = 0.$$

Mit

$$\int_V dV \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} \bar{u}_i) = \oint_S dS \sum_{i,j} \tau_{ij} \bar{u}_i n_j,$$

folgt weiter:

$$\int_V dV \sum_i \left[ - \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + f_i^B \bar{u}_i \right] + \oint_S dS \sum_{i,j} \tau_{ij} \bar{u}_i n_j = 0.$$

Verwenden wir nun weiter (6.62) und (6.64), so erkennen wir, daß das Oberflächenintegral auf die Oberfläche  $S_f$  beschränkt ist, woraus sich

$$\int_V dV \sum_i \left[ - \sum_j \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + f_i^B \bar{u}_i \right] + \sum_i \int_{S_f} dS f_i^{S_f} \bar{u}_i^{S_f} = 0 \quad (6.66)$$

ergibt, mit  $\bar{\mathbf{u}}^{S_f}$  den virtuellen Verschiebungen auf der Oberfläche  $S_f$ .

Wir nützen nun die Tatsache, daß der Spannungstensor  $\boldsymbol{\tau}$  symmetrisch ist, also  $\tau_{ij} = \tau_{ji}$  gilt. Damit erhalten wir

$$\sum_{i,j} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j} \tau_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \sum_{i,j} \tau_{ij} \bar{\epsilon}_{ij},$$

mit den virtuellen Verzerrungen  $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}$ , welche sich aus den virtuellen Verschiebungen  $\bar{\mathbf{u}}$  entsprechend (6.58) ergeben. Damit erhalten wir für (6.66)

$$\int_V dV \sum_{i,j} \tau_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} = \int_V dV \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}^B + \int_{S_f} dS (\bar{\mathbf{u}}^{S_f})^T \mathbf{f}^{S_f}$$

oder in allgemeiner Form:

$$\int_V dV \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^T \boldsymbol{\tau} = \int_V dV \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{f}^B + \int_{S_f} dS (\bar{\mathbf{u}}^{S_f})^T \mathbf{f}^{S_f} + \sum_i (\bar{\mathbf{u}}^i)^T \mathbf{R}^i. \quad (6.67)$$

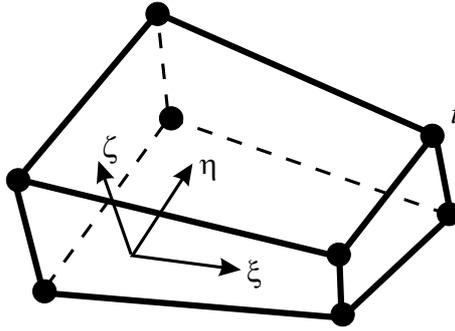


Abbildung 6.10:  $m$ -tes dreidimensionales Acht-Knotenelement im beliebig geformten Körper von Abb. 6.9

Damit konnte das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für das vorliegende allgemeine Problem aufgestellt werden. Die linke Seite von (6.67) entspricht der inneren virtuellen Arbeit und die rechte Seite der äußeren virtuellen Arbeit. In (6.67) wurden zudem die Spannungen  $\boldsymbol{\tau}$  als bekannte Größen angenommen, und es sind die Spannungen, welche mit den wirkenden Lasten im Gleichgewicht stehen.

Wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (6.67) von allen zulässigen virtuellen Verschiebungen und von solchen Spannungen  $\boldsymbol{\tau}$  befriedigt, welche von einem kontinuierlichen, die Verschiebungsbedingungen auf  $S_u$  erfüllenden Verschiebungsfeld  $\mathbf{U}$  "korrekt abgeleitet" wurde, so sind die drei grundlegenden Forderungen der Mechanik erfüllt:

1. *Das Gleichgewicht* ist erfüllt, weil das Prinzip der virtuellen Verschiebungen ein Ausdruck für das Gleichgewicht ist.
2. *Die Kompatibilität* ist erfüllt, weil das Verschiebungsfeld  $\mathbf{U}$  kontinuierlich ist und die Verschiebungsrandbedingungen erfüllt.
3. *Das Spannungs-Verzerrungs-Gesetz* ist erfüllt, weil die Spannungen  $\boldsymbol{\tau}$  mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen aus den Verzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}$  ermittelt wurden, welche ihrerseits aus den Verschiebungen  $\mathbf{U}$  abgeleitet wurden.

## 6.4.2 Die Finite-Element Gleichungen

In einer Finite-Element Rechnung wird der Körper mit Hilfe einer Gruppierung diskreter finiter Elemente angenähert. Diese sind in *Knotenpunkten*, welche auf den Elementegrenzen definiert sind, miteinander verbunden. Die Verschiebungen innerhalb eines jeden Elementes, welche man in einem passend zu wählenden lokalen Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta$  mißt, werden als Funktion der Verschiebungen in den  $N$  Knotenpunkten aller finiten Elemente angenommen. Es gilt für das  $m$ -te Element (siehe Abb. 6.10) des Körpers in Abb. 6.9:

$$\mathbf{u}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{H}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) \hat{\mathbf{U}}. \quad (6.68)$$

Hierbei ist  $\mathbf{u}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta)$  die Verschiebung im Element  $m$ ,  $\mathbf{H}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta)$  ist eine Interpolationsmatrix für die Verschiebungen und  $\hat{\mathbf{U}}$  ist der Vektor der drei globalen Verschiebungskomponenten  $U_x^i, U_y^i, U_z^i, i = 1, 2, \dots, N$  einschließlich jener an den Lagern der Elemente-Gruppierung. Damit ist  $\hat{\mathbf{U}}$  ein Vektor der Dimension  $3N$ , oder allgemeiner

$$\hat{\mathbf{U}}^T = (U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad \dots \quad U_{3N})$$

mit  $U_i$  der Verschiebung in irgendeine der Richtungen  $x, y, z$  oder sogar in eine nicht in diese Koordinatenachsen (sondern in Richtung von Achsen anderer lokaler Koordinatensysteme) weisende Richtung.  $U_i$  kann auch eine Drehung kennzeichnen. Da  $\hat{\mathbf{U}}$  auch die Verschiebungen an den Auflagen der Elemente-Gruppierungen enthält, müssen später die bekannten Werte  $\hat{\mathbf{U}}$  eingeführt werden, bevor man nach den noch unbekanntenen Knotenpunktverschiebungen auflöst.

Das in Abb. 6.10 dargestellte, typische finite Element ist Teil einer Gruppierung. Das Element hat acht Knoten. Der Gesamtkörper wird als Gruppierung solcher Elemente so dargestellt, daß zwischen den Elementen keine Lücken bleiben, wobei aber Elemente nur an ihren Knoten verbunden werden können. In der Praxis können Elemente unterschiedlicher Geometrie mit Knotenpunkten auf den Außenflächen des Körpers und in seinem Inneren verwendet werden. Die Wahl des Elements/der Elemente (*Triangulierung*) und die Konstruktion der entsprechenden Einträge in die Interpolationsmatrix  $\mathbf{H}^{(m)}$ , die von der Geometrie des Elements, der Zahl der Elementknoten/Freiheitsgrade und den Konvergenzanforderungen abhängen, stellen die grundlegenden Schritte einer Finite-Elemente Rechnung dar.

Obwohl *alle* Knotenpunktverschiebungen in  $\hat{\mathbf{U}}$  aufgelistet sind, hängt die Verschiebungs- und Verzerrungsverteilung im Inneren eines finiten Elementes *nur* von den Verschiebungen der Knoten dieses Elements ab. Mit Hilfe von (6.68) können nun die Elementverzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) \hat{\mathbf{U}} \quad (6.69)$$

ermittelt werden.  $\mathbf{B}^{(m)}$  bezeichnet man als die *Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix*. Man erhält ihre Zeilen durch zweckmäßiges Differenzieren und Kombinieren von Zeilen der  $\mathbf{H}^{(m)}$ -Matrix.

Die Spannungen im  $m$ -ten Element sind mit den Elementverzerrungen  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$  und den Element-Anfangsspannungen  $\boldsymbol{\tau}^{I(m)}$  über

$$\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} + \boldsymbol{\tau}^{I(m)} \quad (6.70)$$

verknüpft. Dabei ist  $\mathbf{C}^{(m)}$  die Elastizitätsmatrix des  $m$ -ten Elements. Grundsätzlich kann  $\mathbf{C}^{(m)}$  von Element zu Element verschieden sein.

Mit der Annahme (6.68) über die Verschiebungen in jedem finiten Element können nun die Gleichgewichtsbeziehungen bzgl. der Knotenpunktverschiebungen der Gruppierung finiter Elemente aufgestellt werden. Für  $k$

finite Elemente ergibt (6.67)

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^k \int_{V^{(m)}} dV (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)})^T \boldsymbol{\tau}^{(m)} &= \sum_{m=1}^k \int_{V^{(m)}} dV (\bar{\mathbf{u}}^{(m)})^T \mathbf{f}^{B(m)} \\
&+ \sum_{m=1}^k \int_{S_1^{(m)} \dots S_q^{(m)}} dS (\bar{\mathbf{u}}^{S(m)})^T \mathbf{f}^{S(m)} \\
&+ \sum_i (\bar{\mathbf{u}}^i)^T \mathbf{R}^i. \tag{6.71}
\end{aligned}$$

$S_1^{(m)} \dots S_q^{(m)}$  sind dabei jene Elementflächen, welche Teile der Oberfläche  $S$  des Körpers sind. Für Elemente, welche zur Gänze von anderen Elementen umgeben sind, gibt es keine solchen Flächen. (6.71) nimmt des weiteren an, daß Einzellasten  $\mathbf{R}^i$  mit ihren Angriffspunkten auf Knotenpunkte “verlegt” wurden.

*In (6.71) wird über Volumina und Oberflächen der Elemente integriert. Es dürfen daher bei der Berechnung dieser Integrale bei Bedarf für jedes Element unterschiedliche und besonders gut geeignete Koordinatensysteme verwendet werden.*

Natürlich wird vorausgesetzt, daß für jedes Integral nur ein Koordinatensystem für alle Variablen des Integranden verwendet wird, was geeignete Transformationen notwendig macht. Die Möglichkeit der Verwendung geeigneter lokaler Koordinatensysteme ist aber der Grund dafür, warum jedes der Integrale einer beliebigen Elemente-Gruppierung sehr effektiv berechnet werden kann.

Wir verwenden nun (6.68) und (6.69) für die unbekanntenen Elementverschiebungen und -verzerrungen in Anwendung des Prinzips virtueller Verschiebungen

$$\bar{\mathbf{u}}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{H}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) \bar{\mathbf{u}} \tag{6.72}$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{B}^{(m)}(\xi, \eta, \zeta) \bar{\mathbf{u}}, \tag{6.73}$$

mit  $\bar{\mathbf{u}}$  dem Äquivalent zu  $\hat{\mathbf{U}}$  für die virtuellen Verschiebungen an den Knotenpunkten. Dies ergibt für (6.71)

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathbf{u}}^T \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} dV (\mathbf{B}^{(m)})^T \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} \right] \hat{\mathbf{U}} \\
&= \bar{\mathbf{u}}^T \left[ \sum_m \int_{V^{(m)}} dV (\mathbf{H}^{(m)})^T \mathbf{f}^{B(m)} - \sum_m \int_{V^{(m)}} dV (\mathbf{B}^{(m)})^T \boldsymbol{\tau}^{I(m)} \right. \\
&\quad \left. + \sum_m \int_{S_1^{(m)} \dots S_q^{(m)}} dS (\mathbf{H}^{S(m)})^T \mathbf{f}^{S(m)} + \mathbf{R} \right]. \tag{6.74}
\end{aligned}$$

Die Interpolationsmatrizen für die Oberflächenverschiebungen  $\mathbf{H}^{S(m)}$  erhält man aus den Interpolationsmatrizen  $\mathbf{H}^{(m)}$  indem die passenden Element-Oberflächenkoordinaten eingesetzt werden.  $\mathbf{R}$  ist der Vektor der Einzellasten, welche in den Knoten der Elemente-Gruppierung wirken. Dabei ist die  $i$ -te Komponente von  $\mathbf{R}$  die Knoteneinzelkraft, welche der  $i$ -ten Verschiebungskomponente in  $\hat{\mathbf{U}}$  entspricht. Die Knotenpunktverschiebungen  $\tilde{\mathbf{u}}$  und  $\hat{\mathbf{U}}$  der Elemente-Gruppierung sind vom Element  $m$  unabhängig.

Man gewinnt aus (6.74) die Gleichungen für die unbekanntenen Knotenpunktverschiebungen unter  $3N$ -facher Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebung derart, daß der Reihe nach alle Komponenten von  $\tilde{\mathbf{u}}$  virtuellen Einheitsverschiebungen unterworfen werden. Es ist also bei der ersten Anwendung  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_1$ , bei der zweiten  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_2$  und schließlich bei der  $3N$ -ten Anwendung  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{e}_{3N}$  zu setzen. Das Ergebnis, die auf die Knotenverschiebungen bezogenen Gleichgewichtsbeziehungen der Elemente-Gruppierung, lautet dann in Matrixform

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (6.75)$$

mit

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_B + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_C$$

als Lastvektor.  $\mathbf{K}$  ist dabei die bereits bekannte Steifigkeitsmatrix der Elementegruppierung

$$\mathbf{K} = \sum_m \int_{V^{(m)}} dV \left( \mathbf{B}^{(m)} \right)^T \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} = \sum_m \mathbf{K}^{(m)},$$

$\mathbf{R}_B$  ist der Anteil der Element-Volumenkräfte

$$\mathbf{R}_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} dV \left( \mathbf{H}^{(m)} \right)^T \mathbf{f}^{B(m)} = \sum_m \mathbf{R}_B^{(m)},$$

$\mathbf{R}_S$  sind die Element-Oberflächenkräfte

$$\mathbf{R}_S = \sum_m \int_{S_1^{(m)} \dots S_q^{(m)}} \left( \mathbf{H}^{S(m)} \right)^T \mathbf{f}^{S(m)} = \sum_m \mathbf{R}_S^{(m)},$$

$\mathbf{R}_I$  sind die Element-Anfangsspannungen

$$\mathbf{R}_I = \sum_m \int_{V^{(m)}} dV \left( \mathbf{B}^{(m)} \right)^T \boldsymbol{\tau}^{I(m)} = \sum_m \mathbf{R}_I^{(m)},$$

und  $\mathbf{R}_C$  sind die Einzellasten der Knoten.

Die Summation der Element-Volumenintegrale bedeutet die direkte Addition der Element-Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}^{(m)}$  zur Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  der Gesamtanordnung. Wir haben also wieder die direkte Steifigkeitsmethode gefunden, welche bereits in Gleichung (6.9) angedeutet wurde.

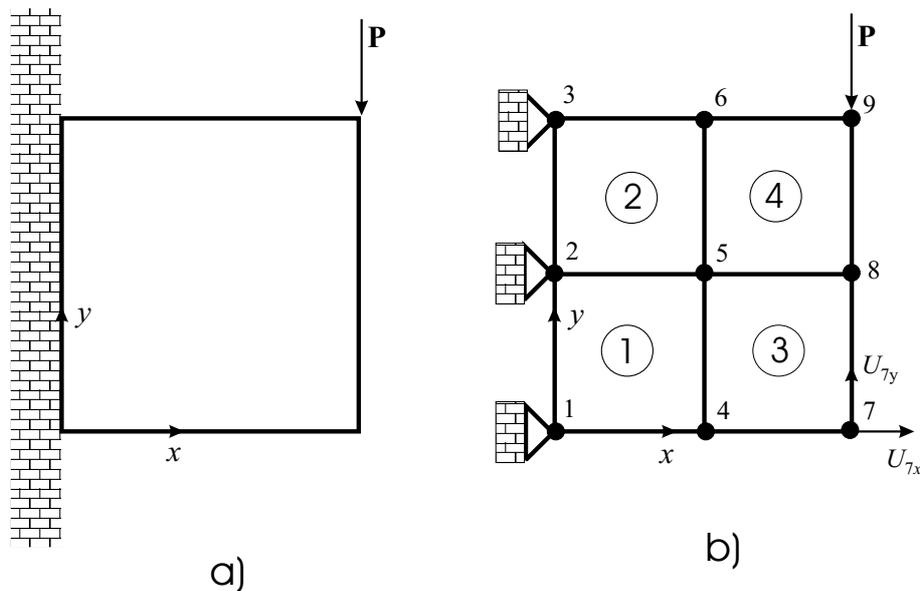


Abbildung 6.11: Finite-Elemente Berechnung eines ebenen Spannungszustandes, a) Trägerscheibe, b) Finite-Elemente Idealisierung des ebenen Spannungszustandes.

Wir wollen dies nun anhand des Beispiels Abb. 6.11a an einem scheibenförmigen Träger untersuchen, welcher mit der in Abb. 6.11b angegebenen groben Finite-Elemente Idealisierung untersucht werden soll. Wir greifen das Element 2 heraus und wollen für dieses die Matrizen  $\mathbf{H}^{(2)}$ ,  $\mathbf{B}^{(2)}$  und  $\mathbf{C}^{(2)}$  aufstellen. Das Element ist in seinem lokalen Koordinatensystem in Abb. 6.12 dargestellt. Die Elementknoten sind von 1 bis 4 durchnummeriert und der Bezug zur Knotennummerierung im Gesamtnetz von Abb. 6.11b ist in runden Klammern der Knotennummer angefügt. Die Koordinaten eines Netzknotens im lokalen Netz von Element 2 sind durch  $(\xi_i, \eta_i)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  gegeben. Wir haben einen ebenen Spannungszustand vorliegen und für isotrope, linear-elastische Materialien ergibt sich<sup>1</sup>

$$\mathbf{C}^{(2)} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix},$$

mit  $E$  dem Elastizitätsmodul und  $\nu$  der Querkontraktionszahl. Beides sind bekannte Materialparameter.

Die Verschiebungs-Transformationsmatrix  $\mathbf{H}^{(2)}$  des Elements 2 verknüpft die inneren Elementverschiebungen  $\mathbf{u}^{(2)}(\xi, \eta)$  mit den Knotenverschiebungen  $\mathbf{U}$  mit Hilfe von

$$\mathbf{u}^{(2)}(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} u_\xi(\xi, \eta) \\ u_\eta(\xi, \eta) \end{pmatrix}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)}(\xi, \eta)\mathbf{U} \quad (6.76)$$

<sup>1</sup>K.-J. Bathe, *Finite-Elemente-Methoden*, Springer (2002), Tabelle 4.3

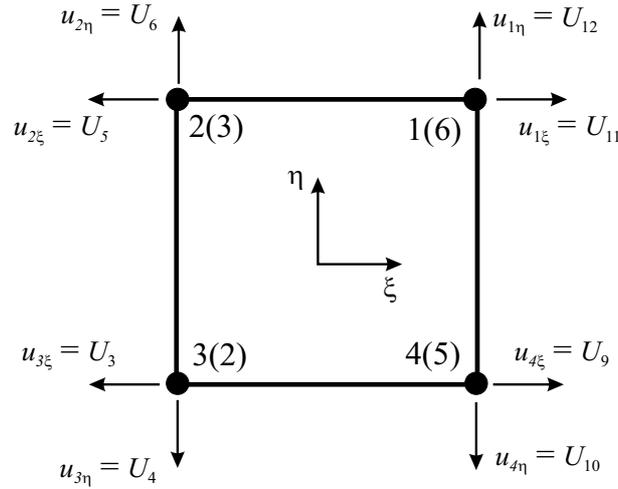


Abbildung 6.12: Typisches zweidimensionales Vier-Knoten Element, definiert im lokalen Koordinatensystem. Es stellt Element 2 aus Abb. 6.11 dar.

mit

$$\mathbf{U}^T = (U_1 \ U_2 \ \dots \ U_9 \ U_{10} \ \dots \ U_{18}). \quad (6.77)$$

Wir betrachten hier zunächst keine Verschiebungsrandbedingungen. Die Verschiebungsverteilung in Element 2 wird dann nur von den Verschiebungen in den Knoten 6, 3, 2 und 5 der Originalgruppierung bestimmt.

Wollen wir nun  $\mathbf{H}^{(2)}(\xi, \eta)$  in (6.76) bestimmen, so gehen wir davon aus, daß die Komponenten der internen Verschiebungen  $u_\xi(\xi, \eta)$  und  $u_\eta(\xi, \eta)$  durch die vier Knotenpunktverschiebungen bestimmt werden. Es kann daher angenommen werden, daß sich die lokalen Elementverschiebungen  $\mathbf{u}(\xi, \eta)$  durch folgendes Polynom in den lokalen Koordinaten ausgedrückt lassen

$$\begin{aligned} u_\xi(\xi, \eta) &= \alpha_1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\xi\eta \\ u_\eta(\xi, \eta) &= \beta_1 + \beta_2\xi + \beta_3\eta + \beta_4\xi\eta, \end{aligned} \quad (6.78)$$

mit unbekanntem Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \beta_4$ , welche auch als *generalisierte Koordinaten* bezeichnet werden. Wir wollen diese Koeffizienten nun durch die ebenfalls unbekanntem Element-Knotenpunktverschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = (u_{1\xi} \ u_{2\xi} \ u_{3\xi} \ u_{4\xi} \ u_{1\eta} \ u_{2\eta} \ u_{3\eta} \ u_{4\eta}) \quad (6.79)$$

ausgedrücken. Wir schreiben (6.78) in Matrixform als

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \Phi \boldsymbol{\alpha}, \quad (6.80)$$

mit

$$\Phi = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varphi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\varphi} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi} = (1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta) \quad (6.81)$$

und

$$\boldsymbol{\alpha}^T = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4).$$

Gleichung (6.80) muß für alle Knotenpunkte des Elements gelten und wir finden unter Verwendung von (6.79)

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \end{pmatrix} \quad (6.82)$$

mit

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \xi_1\eta_1 \\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \xi_2\eta_2 \\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \xi_3\eta_3 \\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \xi_4\eta_4 \end{pmatrix}. \quad (6.83)$$

Wir lösen (6.82) nach  $\boldsymbol{\alpha}$  auf

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{u}}$$

und setzen in (6.80) ein. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\xi, \eta) &= \boldsymbol{\Phi}\mathbf{A}^{-1}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{H} &= \boldsymbol{\Phi}\mathbf{A}^{-1}, \end{aligned} \quad (6.84)$$

mit  $\mathbf{H}$  einer  $8 \times 2$ -Matrix. Das Fehlen des oberen Index weist darauf hin, daß die Verschiebungsinterpolationsmatrix bzgl. der Element-Knotenpunkt-Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}$  definiert ist.

Die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix kann nunmehr gewonnen werden. Im ebenen Spannungszustand gibt es nur

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy})$$

mit

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}.$$

Man kann aber wegen (6.79) auch

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \xi \\ 0 & 0 & 1 & \xi & 0 & 1 & 0 & \eta \end{pmatrix}$$

schreiben, wobei die Matrix  $\mathbf{E}$  durch entsprechendes Differenzieren der Gleichungen (6.79) aufgestellt wurde. Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\boldsymbol{\alpha} &= \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}} \\ \mathbf{E}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} &= \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}\mathbf{A}^{-1}.$$

$\mathbf{B}$  ist eine  $8 \times 3$  Matrix. Die hier demonstrierte Methode kann verallgemeinert werden: Finite-Elemente Matrizen heißen verallgemeinerte oder generalisierte

Finite-Elemente Koordinatenmodelle, wenn sie unter der Annahme formuliert wurden, daß die Verschiebungen in Form einer Funktion veränderlich sind, deren unbekannte Koeffizienten als generalisierte Koordinaten angegeben werden.

Die Matrix  $\mathbf{H}^{(2)}$  kann jetzt aus der Matrix  $\mathbf{H}$  gewonnen werden. Wir bezeichnen die Elemente der Matrix  $\mathbf{H}$  mit  $H_{ij}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$ . Die Matrix  $\mathbf{H}^{(2)}$  ist nach dem Vektor  $\mathbf{U}$  entsprechend Gleichung (6.77) organisiert und ein Vergleich mit Abb. 6.12 zeigt, daß die Verschiebungen  $U_1$  und  $U_2$  nicht zur Berechnung des Spannungszustandes von Element 2 beitragen. Die entsprechenden Elemente von  $\mathbf{H}^{(2)}$  werden daher Null sein. Die Verschiebungen  $U_3$  und  $U_4$  greifen am Knoten 3 von Element 2 an mit den zugehörigen Verschiebungen  $u_{3\xi}$  und  $u_{3\eta}$  im lokalen Koordinatensystem. Ihnen entsprechen die Elemente  $H_{13}$ ,  $H_{23}$ ,  $H_{17}$  und  $H_{27}$  der Matrix  $\mathbf{H}$ , welche ja nach dem Vektor  $\hat{\mathbf{u}}$  entsprechend (6.79) organisiert ist. Somit ergibt sich für die Matrix  $\mathbf{H}^{(2)}$  folgendes Ergebnis:

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & H_{13} & H_{17} & H_{12} & H_{16} & 0 & 0 & H_{14} & H_{18} \\ 0 & 0 & H_{23} & H_{27} & H_{22} & H_{26} & 0 & 0 & H_{24} & H_{28} \\ H_{11} & H_{15} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ H_{21} & H_{25} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

Analog erhalten wir die Matrix  $\mathbf{B}^{(2)}$  aus den Elementen  $B_{ij}$ , mit  $i = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2, \dots, 8$  der Matrix  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & B_{13} & B_{17} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & B_{14} & B_{18} \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{27} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & B_{24} & B_{28} \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{37} & B_{32} & B_{36} & 0 & 0 & B_{34} & B_{38} \\ B_{11} & B_{15} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{21} & B_{25} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B_{31} & B_{35} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.86)$$

### 6.4.3 Isoparametrische Finite-Elemente Matrizen

Wir haben bereits die Formulierung und Berechnung von Finite-Element Modellen mit generalisierten Koordinaten behandelt. Wir wollen nun auf die Formulierung *isoparametrischer finiter Elemente* übergehen. Bei der Herleitung in generalisierten Koordinaten wurden lokale Finite-Element Koordinatensysteme  $(\xi, \eta, \zeta)$  verwendet, dabei wurden die Verschiebungskomponenten  $u_\xi(\xi, \eta, \zeta)$ ,  $u_\eta(\xi, \eta, \zeta)$  und  $u_\zeta(\xi, \eta, \zeta)$  als Polynome in  $\xi$ ,  $\eta$  und  $\zeta$  mit unbestimmten konstanten Koeffizienten  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  und  $\gamma_i$ , mit  $i = 1, 2, \dots$  angenommen. Diese Koeffizienten wurden als generalisierte Koeffizienten bezeichnet.

Der Grundgedanke bei der Formulierung von isoparametrischen finiten Elementen ist es eine Verbindung zwischen den Elementverschiebungen in jedem beliebigen Punkt des Elements und den Knotenpunktverschiebungen durch Verwendung von *Interpolationsfunktionen*, welche auch *Formfunktio-*

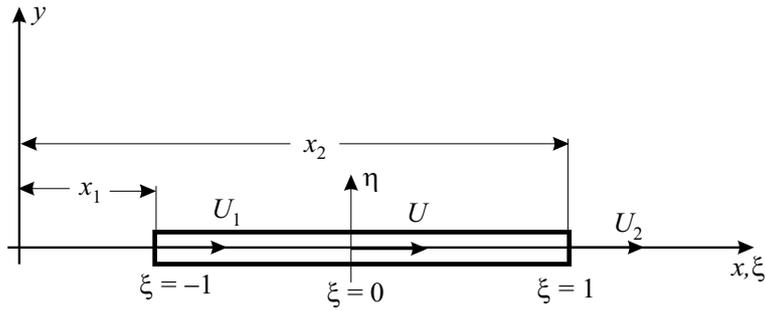


Abbildung 6.13: Stabelement im globalen  $(x, y)$  und im natürlichen  $(\xi, \eta)$  Koordinatensystem.

nen genannt werden, direkt zu erreichen. Das würde bedeuten, daß die Transformationsmatrix  $\mathbf{A}^{-1}$  nicht mehr zu berechnen ist und die Finite-Element-Matrizen, die den erforderlichen Freiheitsgraden entsprechen, unmittelbar gewonnen werden.

Wir wollen dies wieder an Hand des in Abb. 6.13 dargestellten Stabelement demonstrieren. Wir nehmen an, daß die Stabachse in der globalem  $x$ -Koordinate liegt. Wir verknüpfen nun die globalen  $x$ -Koordinaten mit einem *natürlichen (lokalen)* Koordinatensystem gekennzeichnet durch die Variable  $-1 \leq \xi \leq 1$ . Die Transformation ist durch

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(1 - \xi)x_1 + \frac{1}{2}(1 + \xi)x_2 = \sum_{i=1}^2 h_i(\xi, \eta)x_i \quad (6.87)$$

gegeben. Die  $h_i$  sind dabei die Interpolations- oder Formfunktionen. Die globalen Verschiebungen des Stabes werden auf die gleiche Weise beschrieben:

$$U(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^2 h_i(\xi, \eta)U_i, \quad (6.88)$$

wodurch ein linearer Verschiebungsverlauf festgelegt ist.

Die Interpolation der Element-Koordinaten und der Element-Verschiebungen mit Hilfe derselben Interpolations- oder Formfunktionen, welche in einem natürlichen Koordinatensystem definiert sind, bildet die Grundlage der isoparametrischen Formulierung der Finiten-Elemente Methode.

Wir ermitteln die Element-Verzerrungen  $\varepsilon = dU/dx$ , also

$$\varepsilon = \frac{dU}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}, \quad \frac{dU}{d\xi} \stackrel{(6.88)}{=} \frac{U_2 - U_1}{2}, \quad \frac{dx}{d\xi} \stackrel{(6.87)}{=} \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2}, \quad (6.89)$$

mit der Stablänge  $L$ . Somit gilt

$$\varepsilon = \frac{U_2 - U_1}{L}$$

und wegen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}$$

erhalten wir für die Verzerrungs-Verschiebungs Transformationsmatrix

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Im allgemeinen wird  $\mathbf{B}$  eine Funktion der natürlichen Koordinaten sein.

Es folgt weiter für die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K} = \int_V dV \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B},$$

oder in natürlichen Koordinaten für unseren eindimensionalen Fall

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \int_{-1}^1 d\xi \mathcal{J} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.90)$$

mit  $A$  dem Stabquerschnitt und  $E$  dem Elastizitätsmodul.  $\mathcal{J}$  ist die Determinante der JACOBISCHEN Metrix, welche eine Elementlänge im globalen Koordinatensystem mit einer Elementlänge im natürlichen Koordinatensystem verknüpft:

$$dx = \mathcal{J} d\xi, \quad \mathcal{J} \stackrel{(6.89)}{=} \frac{L}{2}.$$

Wir erhalten schließlich die Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses Ergebnis wurde bereits im Rahmen der typischen Elementgleichgewichtsbeziehung (6.7) vorweggenommen.

## 6.5 Finite-Element Lösung der stationären Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung in einem zweidimensionalen Gebiet  $\mathcal{G}$  sei durch

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + Q$$

gegeben. Dabei ist  $T = T(x, y, t)$  das Temperaturfeld und  $Q = Q(x, y)$  die Wärmeentwicklung pro Volumen. Die Wärmeleitfähigkeit sei isotrop und habe den Wert 1. Die Oberfläche  $\mathcal{S}$ , welche das Gebiet  $\mathcal{G}$  einschließt, zerfalle in drei Bereiche  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3$ , mit  $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_3 \cap \mathcal{S}_1 = 0$ . Auf der Oberfläche  $\mathcal{S}_1$  sei  $T$  gleich einem konstanten Wert  $T^0$ , auf  $\mathcal{S}_2$  sei die

Randbedingung  $\mathbf{n}\nabla T = q$  und auf  $\mathcal{S}_3$  die Randbedingung  $\mathbf{n}\nabla T = 0$  erfüllt.  $\mathbf{n}$  ist dabei der Flächennormalvektor auf die Oberfläche  $\mathcal{S}_i$ .

Wir wollen uns aber hier auf den stationären Fall

$$\nabla^2 T + Q = 0$$

konzentrieren, was die Auflösung einer POISSONGleichung verlangt. Wir verwenden die schwache Formulierung (6.54) zur Lösung und finden

$$\int_{\mathcal{G}} dG \nabla^2 T w + \int_{\mathcal{G}} dG Q w = 0,$$

mit  $w$  entsprechenden Testfunktionen, welche demselben Funktionenraum entnommen werden, welcher auch die gesuchte Lösung enthält. Es gilt weiter

$$\int_{\mathcal{G}} dG (\nabla T \nabla w - Q w) - \int_{\mathcal{S}} dS (\mathbf{n}\nabla T) w = 0,$$

mit

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} dS (\mathbf{n}\nabla T) w &= \int_{\mathcal{S}_1} dS \left( \underbrace{\mathbf{n}\nabla T}_{=0} \right) w - \int_{\mathcal{S}_2} dS \underbrace{\mathbf{n}\nabla T}_{=q} w \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}_3} dS \underbrace{\mathbf{n}\nabla T}_{=0} w, \end{aligned}$$

und wir erhalten schließlich:

$$\int_{\mathcal{G}} dG (\nabla T \nabla w - Q w) - \int_{\mathcal{S}_2} dS (\mathbf{n}\nabla T) w = 0.$$

Nach Triangulierung des Gebietes  $\mathcal{G}$  wird entsprechend (6.74) die Wärmeleitungsgleichung nur mehr auf dem Element  $m$  ausgewertet, was

$$\int_{\mathcal{G}^{(m)}} dG (\nabla T^{(m)} \nabla w - Q w) - \int_{\mathcal{S}_2^{(m)}} dS \underbrace{\mathbf{n}\nabla T^{(m)}}_{=q^{(m)}} w = 0 \quad (6.91)$$

ergibt. Das Linienintegral über  $\mathcal{S}_2$  ist dabei nur auf jenen Elementen zu berechnen, welche einen Knotenpunkt auf der Oberfläche  $\mathcal{S}_2$  haben, also zum Gebietsrand gehören.

Wir machen nun entsprechend (6.72) für das Temperaturfeld auf dem Element  $m$  den Ansatz

$$T^{(m)}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n T_j^{(m)} H_j^{(m)}(\xi, \eta) = (\mathbf{H}^{(m)})^T \mathbf{T}^{(m)} \quad (6.92)$$

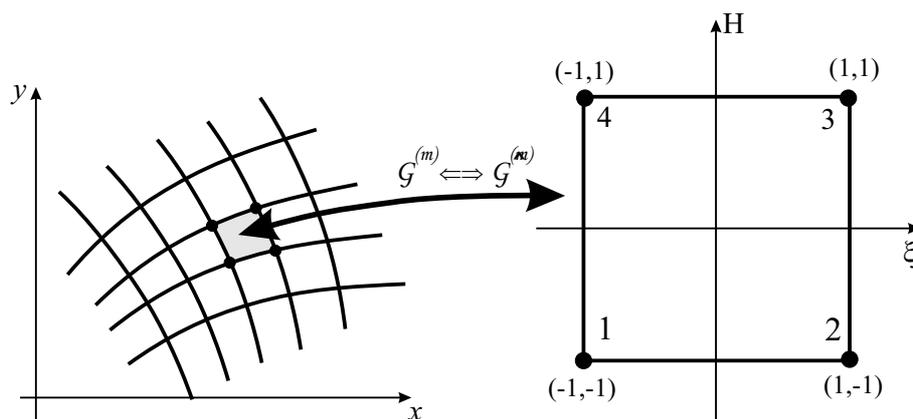


Abbildung 6.14: Transformation der globalen KJoordinaten  $(x, y)$  des Elementes  $\mathcal{G}^{(m)}$  auf das Referenzelement  $\hat{\mathcal{G}}^{(m)}$  im natürlichen Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$

mit  $n$  der Dimension des Funktionenraums  $\mathcal{V}_h$ ,  $T_j^{(m)}$  den Temperaturwerten an den Knoten und  $H_j^{(m)}(\xi, \eta)$  der Interpolationsfunktion, welche dem Element  $m$  zugeordnet ist. (Wir sehen, daß wir hier im Gegensatz zum in Fig. 6.12 diskutierten Beispiel pro Knotenpunkt nur einen Wert, nämlich  $T_j^{(m)}$  vorliegen haben und nicht die zwei Komponenten des Verschiebungsvektors. Deshalb werden die Interpolationsfunktionen auch nur zu einem Vektor und nicht zu einer Matrix zusammengefaßt.) Die elementweise Auswertung der schwachen Formulierung  $a^{(m)}(T^{(m)}, w) = f^{(m)}(w)$  liefert dann ein  $n \times n$  Gleichungssystem für jedes Element, welches es erlaubt das Temperaturfeld am Element zu berechnen.

In unserem speziellen Fall wollen wir, wie in Abb. 6.14 angedeutet, das finite Element  $\mathcal{G}^{(m)}$ , welches im globalen Koordinatensystem  $(x, y)$  beschrieben ist, unter Verwendung des bilinearen Rechteckes ( $\dim \mathcal{V}_h = n = 4$ ) mit seinem natürlichen Koordinatensystem  $(\xi, \eta)$  behandeln. Im Sinne von isoparametrischen finiten Elementen werden die Interpolationsfunktion  $H_j^{(m)}(\xi, \eta)$  aus (6.92) auch zur Abbildung der Geometrie verwendet und damit ergibt sich entsprechend (6.87)

$$\begin{aligned} x(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^n x_j^{(m)} H_j^{(m)}(\xi, \eta) = (\mathbf{H}^{(m)})^T \mathbf{x}^{(m)}, \\ y(\xi, \eta) &= \sum_{j=1}^n y_j^{(m)} H_j^{(m)}(\xi, \eta) = (\mathbf{H}^{(m)})^T \mathbf{y}^{(m)}, \end{aligned} \quad (6.93)$$

mit  $x_j^{(m)}$  und  $y_j^{(m)}$  den globalen Koordinaten der Knotenpunkte des Element  $\mathcal{G}^{(m)}$ .

Die Transformation  $(\xi, \eta) \leftrightarrow (x, y)$  wird durch die JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

beschrieben, und wegen (6.93) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n x_j^{(m)} \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial \xi} = \left( \mathbf{H}_\xi^{(m)} \right)^T \mathbf{x}^{(m)}, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{j=1}^n y_j^{(m)} \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial \xi} = \left( \mathbf{H}_\xi^{(m)} \right)^T \mathbf{y}^{(m)}, \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \left( \mathbf{H}_\eta^{(m)} \right)^T \mathbf{x}^{(m)}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \left( \mathbf{H}_\eta^{(m)} \right)^T \mathbf{y}^{(m)}. \end{aligned} \quad (6.94)$$

Damit ergibt sich für die JACOBI-Determinante:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ &= \left[ \left( \mathbf{H}_\xi^{(m)} \right)^T \mathbf{x}^{(m)} \right] \left[ \left( \mathbf{H}_\eta^{(m)} \right)^T \mathbf{y}^{(m)} \right] - \left[ \left( \mathbf{H}_\eta^{(m)} \right)^T \mathbf{x}^{(m)} \right] \left[ \left( \mathbf{H}_\xi^{(m)} \right)^T \mathbf{y}^{(m)} \right] \\ &= \left( \mathbf{x}^{(m)} \right)^T \left[ \mathbf{H}_\xi^{(m)} \otimes \left( \mathbf{H}_\eta^{(m)} \right)^T - \mathbf{H}_\eta^{(m)} \otimes \left( \mathbf{H}_\xi^{(m)} \right)^T \right] \mathbf{y}^{(m)} \\ &= \left( \mathbf{x}^{(m)} \right)^T \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{y}^{(m)}. \end{aligned} \quad (6.95)$$

(Wir verwenden dabei die Tatsache, daß das Produkt zweier Skalarprodukte als Bilinearform  $\otimes$  geschrieben werden kann.)

Das in Abb. 6.14 dargestellte bilineare Rechteckselement entspricht dem in Abb. 6.12 dargestellten finiten Element und wir können daher unmittelbar die Interpolationsfunktion (6.78) übernehmen:

$$H^{(m)}(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta.$$

Entsprechend (6.83) folgt entsprechend Abb. 6.14:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Vektor  $\varphi$  entsprechend (6.81) folgt aus (6.84)

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{(m)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - \xi - \eta + \xi\eta \\ 1 + \xi - \eta - \xi\eta \\ 1 + \xi + \eta + \xi\eta \\ 1 - \xi + \eta - \xi\eta \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

und weiter:

Knoten	$j = 1$	2	3	4
$H_j^{(m)}$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$
$\frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial \xi}$	$\frac{1}{4}(-1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(1 - \eta)$	$\frac{1}{4}(1 + \eta)$	$\frac{1}{4}(-1 - \eta)$
$\frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial \eta}$	$\frac{1}{4}(-1 + \xi)$	$\frac{1}{4}(-1 - \xi)$	$\frac{1}{4}(1 + \xi)$	$\frac{1}{4}(1 - \xi)$

Damit erhalten wir für die Matrix  $\mathbf{V}^{(m)}$  in (6.95):

$$\mathbf{V}^{(m)} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 1 - \eta & \eta - \xi & \xi - 1 \\ -1 + \eta & 0 & 1 + \xi & -\xi - \eta \\ -\eta + \xi & -1 - \xi & 0 & 1 + \eta \\ -\xi + 1 & \xi - \eta & -1 - \eta & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir können nun unschwer berechnen, wie die  $\partial \mathbf{H}^{(m)} / \partial \mathbf{x}$  transformieren. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial \xi} &= \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial \eta} &= \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta},\end{aligned}$$

(6.96)

oder

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial x} \\ \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial y} \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

mit

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{J}} \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix}.$$

Unter Verwendung von (6.94) erhalten wir noch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial x} &= \mathcal{J}^{-1} \left\{ \left[ (\mathbf{H}_\eta^{(m)})^T \mathbf{y}^{(m)} \right] \mathbf{H}_\xi^{(m)} - \left[ (\mathbf{H}_\xi^{(m)})^T \mathbf{y}^{(m)} \right] \mathbf{H}_\eta^{(m)} \right\} \\ &= \mathcal{J}^{-1} \left[ \mathbf{H}_\xi^{(m)} \otimes (\mathbf{H}_\eta^{(m)})^T - \mathbf{H}_\eta^{(m)} \otimes (\mathbf{H}_\xi^{(m)})^T \right] \mathbf{y}^{(m)} \\ &= \mathcal{J}^{-1} \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{y}^{(m)}, \end{aligned} \quad (6.97)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial y} = \mathcal{J}^{-1} \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{x}^{(m)}. \quad (6.98)$$

Für das Volumenelement  $d\mathcal{G}^{(m)}$  schreiben wir noch

$$d\mathcal{G}^{(m)} = dx dy = \mathcal{J} d\xi d\eta.$$

Wir können nun Gleichung (6.91) weiter behandeln. Der Ansatz für die Temperatur wurde bereits mit Gleichung (6.92) angeschrieben. (6.91) gilt aber auch für alle Testfunktionen  $w = \sum_{i=1}^n c_i H_i^{(m)}$  mit  $c_i \in \mathbb{R}$ . Schreibt man die Summe aus, so kann die Gleichung (6.91) nur dann für beliebige  $w$  bzw. beliebige  $c_i$  gelten, wenn jeder Summand für sich verschwindet. Es folgt also für (6.91) unter Verwendung des Ansatzes (6.92)

$$\nabla T^{(m)} \nabla w \implies \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H_i^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial H_i^{(m)}}{\partial y} \frac{\partial H_j^{(m)}}{\partial y} \right) T_i^{(m)}, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Diese  $n$  Beiträge können in Matrixschreibweise zu

$$\implies \left[ \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial x} \otimes \frac{\partial (\mathbf{H}^{(m)})^T}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial y} \otimes \frac{\partial (\mathbf{H}^{(m)})^T}{\partial y} \right] \mathbf{T}^{(m)}$$

zusammengefaßt und in Gleichung (6.91) eingesetzt werden

$$\begin{aligned} &\underbrace{\int_{\mathcal{G}^{(m)}} d\mathcal{G} \left[ \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial x} \otimes \frac{\partial (\mathbf{H}^{(m)})^T}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}^{(m)}}{\partial y} \otimes \frac{\partial (\mathbf{H}^{(m)})^T}{\partial y} \right] \mathbf{T}^{(m)}}_{= \mathbf{K}^{(m)}} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\mathcal{G}^{(m)}} d\mathcal{G} Q \mathbf{H}^{(m)}}_{= \mathbf{Q}^{(m)}} - \underbrace{\int_{\mathcal{S}_2} dS q^{(m)} \mathbf{H}^{(m)}}_{= \mathbf{q}^{(m)}} = 0. \end{aligned}$$

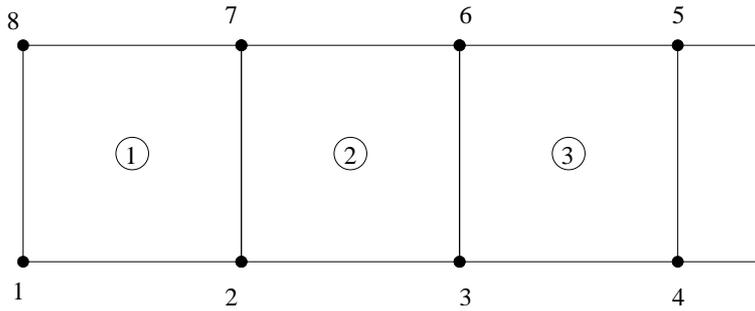


Abbildung 6.15: Beispiel für eine Gebietsaufteilung

Wir schreiben also kompakt

$$\mathbf{K}^{(m)} \mathbf{T}^{(m)} = \mathbf{Q}^{(m)} + \mathbf{q}^{(m)} = \mathbf{f}^{(m)}, \quad (6.99)$$

wobei mit  $\mathbf{K}^{(m)}$  wieder die Elementsteifigkeitsmatrix aufgefunden wurde. Der Term  $\mathbf{q}^{(m)}$  tritt nur auf, wenn das Element  $m$  Knotenpunkte auf der Oberfläche  $\mathcal{S}_2$  hat, sonst ist er gleich Null zu setzen.

Wir transformieren nun die Matrix  $\mathbf{K}^{(m)}$  auf das natürliche Koordinatensystem des bilinearen Rechteckelements  $(\xi, \eta)$  und erhalten unter Verwendung aller vorher abgeleiteten Ergebnisse:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(m)} = & \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} d\xi d\eta \mathcal{J}^{-1} \left[ \left( \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{y}^{(m)} \right) \otimes \left( \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{y}^{(m)} \right)^T \right. \\ & \left. + \left( \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{x}^{(m)} \right) \otimes \left( \mathbf{V}^{(m)} \mathbf{x}^{(m)} \right)^T \right]. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Das Integral ist leicht mit Hilfe von numerischen Methoden auswertbar.

Nachdem nun  $\mathbf{K}^{(m)}$  und  $\mathbf{f}^{(m)}$  bekannt sind, kann man das Kompilieren der Gesamtmatrix  $\mathbf{K}$  und des Gesamtvektors  $\mathbf{f}$  zur Gesamtgleichung des Systems

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \mathbf{f} \quad (6.101)$$

durchführen. Dies erfordert im wesentlichen eine genaue Buchhaltung, wie dies mit Hilfe von Abb. 6.15 demonstriert wird. Wir haben für die einzelnen finiten Elemente die Matrizen

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 3 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad \dots$$

mit dem Ergebnis:

$$\bigoplus_{i=1}^3 \mathbf{K}^{(i)} \equiv \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix} & \begin{pmatrix} * & * & & & & & * & * \\ * & \otimes & \circ & & & \circ & \otimes & * \\ & \circ & \odot & \bullet & \bullet & \odot & \circ & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & \\ & \circ & \odot & \bullet & \bullet & \odot & \circ & \\ * & \otimes & \circ & & & \circ & \otimes & * \\ * & * & & & & & * & * \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Zum Abschluß müssen die Randbedingungen auf der Oberfläche  $\mathcal{S}_1$  (DIRICHLETSche Randbedingungen) in das Gleichungssystem eingebaut werden. Das Gesamtgleichungssystem hat entsprechend (6.101) für  $N$  Knoten die Form:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{j1} & \dots & K_{jj} & \dots & K_{jN} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & \dots & K_{Nj} & \dots & K_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_j \\ \vdots \\ T_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Der Knoten  $j$  liege auf der Oberfläche  $\mathcal{S}_1$  und damit gilt  $T_j = T_j^0$ ,  $T_j$  hat also einen festen, vorgegebenen Wert. Man streicht daher die  $j$ -te Zeile, da diese Lösung ja bereits bekannt ist; man setzt also alle Elemente  $K_{ij}$ ,  $i \neq j$  gleich Null und das Element  $K_{jj} = 1$ :

$$j\text{-te Zeile} \begin{pmatrix} & & \overset{j\text{-te Spalte}}{K_{1j}} & \dots & K_{1N} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ K_{N1} & \dots & K_{Nj} & \dots & K_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_j \\ \vdots \\ T_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ T_j^0 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}.$$

Dies genügt an sich, man findet aber eine elegantere Form, indem man auch die  $j$ -te Spalte durch entsprechendes Nullsetzen der Matrixeinträge löscht, was dann aber auf der rechten Gleichungsseite zu kompensieren ist. Damit

findet man die endgültige Form:

$$\begin{aligned}
 j\text{-te Zeile} \quad & \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & 0 & \dots & K_{1N-1} & K_{1N} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & 0 & \dots & K_{NN-1} & K_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_j \\ \vdots \\ T_N \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} f_1 - K_{1j} T_j^0 \\ f_2 - K_{2j} T_j^0 \\ \vdots \\ T_j^0 \\ \vdots \\ f_{N-1} - K_{N-1j} T_j^0 \\ f_N - K_{Nj} T_j^0 \end{pmatrix}. \quad (6.102)
 \end{aligned}$$

Dies wird für alle Knoten, welche auf der Oberfläche  $\mathcal{S}_1$  liegen durchgeführt. Abschließend wird das Gleichungssystem (6.101) unter Verwendung einer geeigneten numerischen Lösungsmethode nach den Temperaturen  $\mathbf{T}$  aufgelöst.

In der Literatur werden verschiedenste finite Elemente mit ihren Interpolationsfunktionen diskutiert. In den folgenden Abbildungen sind einige von ihnen angegeben.



Abbildung 6.16: Lineares Finites Element in  $\mathbb{R}$ ; ein Freiheitsgrad; Interpolationsfunktion:  $H(\xi) = a + b\xi$

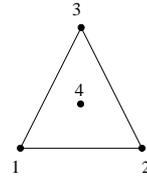


Abbildung 6.17: Quadratisches Finites Element in  $\mathbb{R}^2$ ; Dimension des Funktionenraumes:  $\dim \mathcal{V}_h = 10$

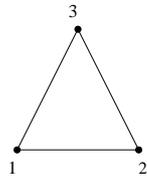


Abbildung 6.18: Lineares Dreieckselement im  $\mathbb{R}^2$ ; Dimension des Funktionenraumes:  $\dim \mathcal{V}_h = 3$ ; Interpolationsfunktion:  $H(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta$

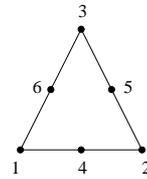


Abbildung 6.19: Quadratisches Dreieckselement im  $\mathbb{R}^2$ ; Dimension des Funktionenraumes:  $\dim \mathcal{V}_h = 6$ ; Interpolationsfunktion:  $H(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta + e\xi^2 + f\eta^2$

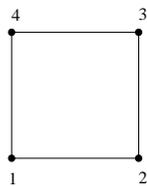


Abbildung 6.20: Bilineares Rechteckselement im  $\mathbb{R}^2$ ; Dimension des Funktionenraumes:  $\dim \mathcal{V}_h = 4$ ; Interpolationsfunktion:  $H(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta$

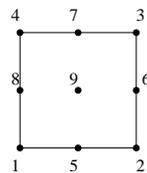


Abbildung 6.21: Biquadratisches Rechteckselement im  $\mathbb{R}^2$ ; Dimension des Funktionenraumes:  $\dim \mathcal{V}_h = 9$ ; Interpolationsfunktion:  $H(\xi, \eta) = a + b\xi + c\eta + d\xi\eta + e\xi^2 + f\eta^2 + g\xi^2\eta + h\xi\eta^2 + i\xi^2\eta^2$

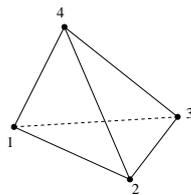


Abbildung 6.22: Lineares Tetraederelement im  $\mathbb{R}^3$ ;  $\dim \mathcal{V}_h = 3$ ;

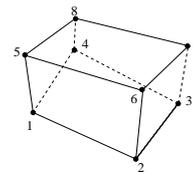


Abbildung 6.23: Hexahedrales Element im  $\mathbb{R}^3$