AUSGEWÄHLTE KAPITEL AUS NUMERIK
H. Sormann SS 2010

Zweites Thema: Finite Elemente

Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_2\frac{\partial f}{\partial y}\right)+gf+h=a_0\frac{\partial f}{\partial t}\,,$$

Dirichlet'sche Randbedingung:

$$f(x,y,t)=f_R(x,y,t)\qquad \text{für}\qquad (x,y)\in R$$

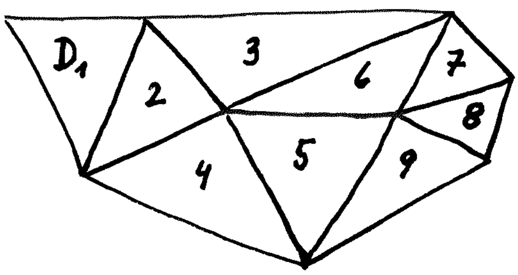
Cauchy'sche Randbedingung:

$$a_1\frac{\partial f}{\partial x}n_x+a_2\frac{\partial f}{\partial y}n_y+a_4f=a_5\qquad \text{für}\qquad (x,y)\in R\,,$$

Variationsprinzip: I(f)$\longrightarrow$ Minimum

$$I(f):=\int_P dxdy\left[\frac{1}{2}\left(a_1f_x^2+a_2f_y^2-gf^2\right)-hf+a_0f_tf\right]+\int_{R_2}ds\left[\frac{1}{2}a_4f^2-a_5f\right]$$

Einteilung des Grundgebietes in Teilflächen:



$$I(f)=\sum_{m=1}^{n}I_m+R_f$$

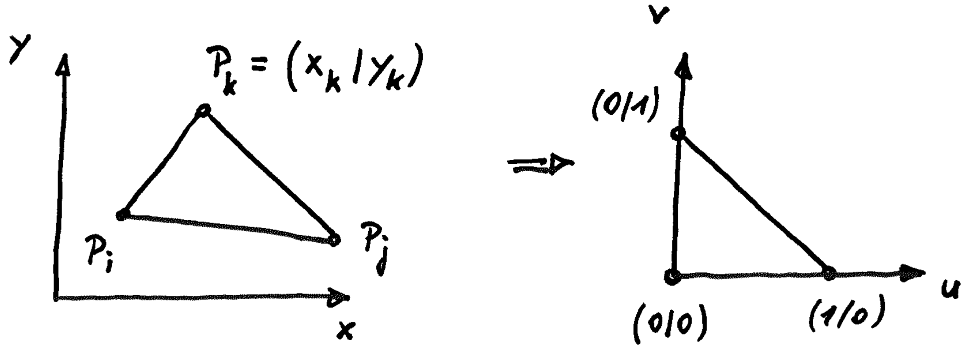
mit

$$I_m=\int_{D_m}dxdy\left[\frac{1}{2}\left(a_1f_x^2+a_2f_y^2-gf^2\right)-hf+a_0f_tf\right]$$

und

$$R_f=\int_{R_2}ds\left[\frac{1}{2}a_4f^2-a_5f\right]\,.$$

Lineare Abbildung der Dreiecksflächen:



$$
\begin{aligned}
x &= x_i + (x_j - x_i)u + (x_k - x_i)v\,, \\
y &= y_i + (y_j - y_i)u + (y_k - y_i)v
\end{aligned}
$$

mit $0 \leq u \leq 1 - v$ und $0 \leq v \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
I_m \approx \frac{e_{11,m}}{2} \int_{D_0} dudv\, f_u^2 + e_{12,m} \int_{D_0} dudv\, f_u f_v + \frac{e_{22,m}}{2} \int_{D_0} dudv\, f_v^2 - \\
- \frac{g_m d_m}{2} \int_{D_0} dudv\, f^2 - h_m d_m \int_{D_0} dudv\, f + a_{0,m} \int_{D_0} dudv\, f_t f\,.
\end{aligned}
$$

Ansatzfunktion für $f(u, v, t)$:

$$
f(u, v, t) = c_{1,m} + c_{2,m} u + c_{3,m} v\,.
$$

Mit

$$
\mathbf{c}_m := \begin{pmatrix} c_{1,m} \\ c_{2,m} \\ c_{3,m} \end{pmatrix}.
$$

und

$$
\mathbf{c}_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{f} \quad \text{mit} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{pmatrix}.
$$

ergibt sich

$$
I_m = \frac{1}{4} \mathbf{f}^\dagger M_1 \mathbf{f} - \frac{g_m d_m}{48} \mathbf{f}^\dagger M_2 \mathbf{f} - \frac{h_m d_m}{6} \mathbf{f}^\dagger \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a_{0,m} d_m}{24} \mathbf{f}^\dagger M_2 \dot{\mathbf{f}}
$$

mit $m = 1, \ldots, n$.

Die letzte Gleichung enthält die beiden symmetrischen Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} e_{11,m} + 2e_{12,m} + e_{22,m} & -e_{11,m} - e_{12,m} & -e_{12,m} - e_{22,m} \\ -e_{11,m} - e_{12,m} & e_{11,m} & e_{12,m} \\ -e_{12,m} - e_{22,m} & e_{12,m} & e_{22,m} \end{pmatrix}$$

und

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Eine ähnliche Vorgangsweise führt für das "Randintegral" zu den folgenden Ergebnissen:

$$R_f = \sum_{\gamma=1}^{n_R} I_{p_\gamma,q_\gamma}$$

mit

$$I_{p,q} = \int_{P_p}^{P_q} ds \left[\frac{1}{2} a_4 f^2 - a_5 f\right]$$

ergibt

$$I_{p,q} = \frac{a_{4,pq} d_{pq}}{12} (f_p \quad f_q) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p \\ f_q \end{pmatrix} - \frac{a_{5,pq} d_{pq}}{2} (f_p \quad f_q) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Variation der Integrale nach f:

$$\frac{1}{2} M_1 \mathbf{f} - \frac{g_m d_m}{24} M_2 \mathbf{f} + \frac{a_{0,m} d_m}{24} M_2 \dot{\mathbf{f}} = \frac{h_m d_m}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

$$\frac{a_{4,pq} d_{pq}}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p \\ f_q \end{pmatrix} = \frac{a_{5,pq} d_{pq}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$