10. Maximum Entropie für Dichten

Es seien die folgenden N linearen Nebenbedingungen gegeben:

$$\Phi_\nu = \int p(x) x^\nu dx - \mu_\nu = 0 \qquad \nu = 1, 2 \ldots, N$$

d.h. man kennt die ersten N Momente der Verteilung.
Gesucht ist die Maximum-Entropie Lösung:

$$p(x) = \frac{1}{Z} e^{-\sum_\mu \lambda_\mu K_\mu(x)}$$

Z sorgt für die Normierung.
Die Momente μ_ν sollen aus folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung berechnet werden:

$$\rho(x) = \left(N(x, x_1, \sigma_1) + cN(x, x_2, \sigma_2)\right) / Z'$$

Dabei ist

$$N(x, x', \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-x')^2/2\sigma^2}$$

Z' soll für die richtige Normierung sorgen, $x_1 = -0.5, x_2 = 0.5, \sigma_1 = \sigma_2 = 0.05, c = 2$.

- Der Befehl zur numerischen Integration lautet $quadl(@FUN, a, b, [\,], [\,], P1, P2, ...)$. FUN ist die zu integrierende Funktion, a, b sind die Integrationsgrenzen, $P1, P2$ weitere Inputargumente der Funktion $FUN(x, P1, P2, ...)$.
- Es genügt völlig, wenn man für den Integrationsbereich $a = -2, b = 2$ wählt.
- Anstelle der N Nebenbedingungen Φ_ν kann man auch eine Nebenbedingung

  $$\Phi = \sum_{\nu=1}^{N} \Phi_\nu^2$$

  wählen.

- Der Befehl, zum Auffinden eines Minimums lautet $fminsearch$.

Die Aufgabe besteht darin, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ zu bestimmen, sodass die Nebenbedingungen erfüllt sind. Es soll die Maximum Entropie Wahrscheinlichkeit für $N = 1, 2, 5, 7$ jeweils zusammen mit der ursprünglichen Dichte $\rho(x)$ dargestellt werden.

BONUS(1P): Leiten Sie eine Formel für das Moment $\mu_\nu = \int \rho(x) x^\nu dx$ her!