11. Maximum-Likelihood vs. χ^2

Es sei eine Menge von Messdaten $\underline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ gegeben. Desweiteren weiß man, dass diese Daten auf einer Gerade liegen sollten, $f(x|a, b) = ax + b$. Die Werte sind jedoch statistisch verrauscht,d.h. $y_i = ax_i + b + z_i$, wobei z_i der Fehler des Messwertes y_i ist. Die Aufgabe besteht darin, die Parameter a und b auf verschiedene Arten zu bestimmen:

1. Mit der Maximum-Likelihood-Methode: Die beiden Parameter a und b sind so zu bestimmen, dass die Likelihood Funktion $p(\underline{y}|a, b)$ maximiert wird (siehe Skriptum Kapitel 20).
2. Least-Squares-Fit: Die Parameter a,b sollen so gewählt werden, dass
$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(y_i - f(x_i|a, b)\right)^2$$
ein Minimum wird.

Die Daten sollen nun auf zwei verschiedene Arten verrauscht werden:

1. Normalverteilter Fehler: Erzeugen Sie die exakten Daten gemäß $y = ax + b$ und addieren sie dazu einen Normalverteilten Fehler mit Standardabweichung $\sigma = 0.1$. Berechnen Sie analytisch die Parameter a_{ML}, b_{ML} mit der Maximum-Likelihood-Methode und a_{χ^2}, b_{χ^2} mit der χ^2-Methode.
2. Exponentiell verteilter Fehler: Die exakten Werte $y = ax + b$ sollen als jeweilger Mittelwert für exponentiell verteilte Zufallszahlen genommen werden ($y_i = exprnd(ax_i + b)$). Nun sollen numerisch die Parameter a_{ML}, b_{ML} und a_{χ^2}, b_{χ^2} bestimmt werden.

Stellen Sie die Ergebnisse dar: Es soll je ein Plot für die Gauß'schen Fehler und ein Plot für die exponentiell verteilten Fehler gemacht werden, in jedem die exakte Lösung $f(x|a, b)$ und die beiden Geraden, die sich aus den errechneten Parametern ergeben.
Wählen Sie $a = 1$, $b = 2$, $x = linspace(0, 1, 10)$ für die gaußverrauschten Daten, $x = linspace(0, 1, 1000)$ für die exponentiell verrauschten Daten.