3. Kombinatorik II

9) (1.5 Punkte) Wir betrachten N Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_N$ und definieren

$$
\begin{aligned}
p_i &= p(A_i) \\
p_{ij} &= p(A_i \wedge A_j) \\
p_{ijk} &= p(A_i \wedge A_j \wedge A_k) \\
&\vdots \\
S_1 &= \sum_{i=1}^{N} p_i \\
S_2 &= \sum_{i_1<i_2=1}^{N} p_{i_1,i_2} \\
S_3 &= \sum_{i_1<i_2<i_3=1}^{N} p_{i_1,i_2,i_3} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

a) Wieviele Summanden gibt es in S_r?

Aus der Summenregel folgt

$$P(A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_N) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots \pm S_N \; . \tag{1}$$

b) Zwei gleiche Kartenspiele werden gemischt und Karte für Karte verglichen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Karte übereinstimmt? Verwenden Sie hierzu Gl. (1) (**Tipp: die Proposition A_i bedeutet dabei, dass die Karten am i-ten Platz übereinstimmen**) .

10) (0.5 Punkte) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von r Personen mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben. Berechnen Sie den numerischen Wert für 30 Personen.

11) **Ballot theorem (1 Punkt)**

Kandidat P erhält bei einer Wahl p Stimmen und Kandidat Q erhält q Stimmen. P sei der Gewinner $p > q$. Die Wahrscheinlichkeit, daß P während der gesamten Auszählung mehr Stimmen hat als Q ist

$$P = \frac{p-q}{p+q} \qquad .$$

Beweis:

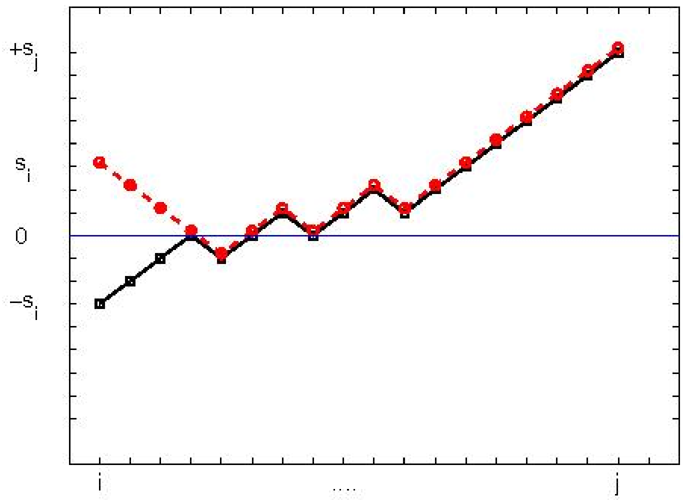
Die Zufallsvariable $x_i = \pm 1$ gebe an, ob die i-te Stimme für P $(x_i = +1)$ oder für Q $(x_i = -1)$ ist. Wir definieren

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} x_i$$

und tragen den Pfad s_k über k auf. Die Zahl der abgegebenen Stimmen ist $n = p + q$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gleich der Zahl der Pfade von $(0,0)$ nach $(n, p-q)$, die außer am Anfangspunkt niemals die x-Achse berühren oder schneiden, geteilt durch die Zahl aller Pfade von $(0,0)$ nach $(n, p-q)$.

Für den Beweis benötigen wir noch das **Reflexionsprinzip**:

Es sei $j > i$ und $s_i > 0$ und $s_j > 0$. Die Zahl der Pfade von (i, s_i) nach (j, s_j), die die x-Achse berühren oder schneiden, ist gleich der Zahl aller Pfade von $(i, -s_i)$ nach (j, s_j).



Berechnen Sie zunächst die Zahl der Pfade $N_{n,x}$ von $(0,0)$. Das Ergebnis von Aufgabe 8 ist hierbei hilfreich!

Vervollständigen Sie den Beweis des Ballot theorems.

12) **Propagatoren (1 Punkt)**

(R. D. Mattuck, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem*, Dover Publications, Inc., New York, (92))

Ein Party-Gast (PG) propagiert nach der Party nach Hause. Dieses Modell wird im obenerwähnten Buch herangezogen um Greensche Funktionen in der Vielteilchen-Theorie zu erklären. Wir betrachten hier ein ganz einfa-

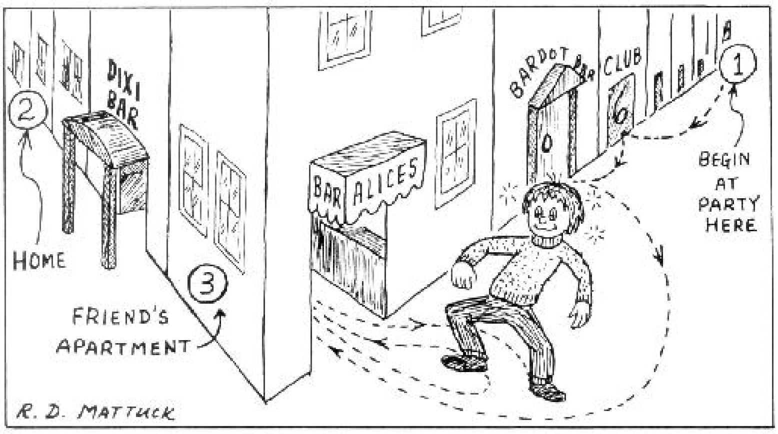


Fig. 1.1 *Propagation of Drunken Man*

(Reproduced with the kind permission of *The Encyclopedia of Physics*)

ches (relativ unrealistisches) Modell. Bei jeder Bar wird erneut überlegt, ob er einkehren soll (Wahrscheinlichkeit P_B) oder nicht $(1-P_B)$. Wenn er einkehrt, besteht ein Wahrscheinlichkeit $P_R < 1$, dass er wieder herauskommt und weiter propagiert.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er noch in dieser Nacht nach Hause kommt?

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P(H|N,\mathcal{B})$.

Die Proposition H besagt:*Er kehrt am Abend heim.*

Die Proposition N bedeutet, dass es N Bars gibt, und der Bedingungskomplex enthält u.a. die Information, dass jede Bar höchstens einmal aufgesucht wird. Zudem sollen die Entscheidungen, in die individuellen Bars einzukehren, unkorreliert (unabhängig) sein.

Verwenden Sie zur Berechnung die Summenregel der Wahrscheinlichkeitstheorie:

$$P(H|N,\mathcal{B}) = \sum_{n=0}^{N} P(H|E_n,N,\mathcal{B})\ P(E_n|N,\mathcal{B}) \qquad .$$

Die disjunkten Ereignisse (Propositionen) E_n bedeuten: *Er kehrt in n Bars ein.*

Es gibt eine nahe liegende physikalische Interpretation des obigen ,,Experiments". Ein Teilchen fliegt durch ein Metall der Länge x. Die N Bars entsprechen Wegstrecken x/N. P_B ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen mit Störstellen in dx wechselwirkt und $(1 - P_R)$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen im Falle einer Wechselwirkung weiterhin in Vorwärtsrichtung fliegt. Bei dieser Interpretation ist die Wahrscheinlichkeit der Wechselwirkung proportional zur Wegstrecke $P_B = \alpha\frac{x}{N}$.

b) Wie lautet das Ergebnis im Limes $N \to \infty$