6. Parameterschätzen

12) Zur Abschätzung der Länge x eines Objektes wird eine Stichprobe $\underline{\mathrm{x}} = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ vom Umfang N bestimmt. Die einzelnen Messwerte sind nicht korreliert und streuen um den wahren Wert x gemäß einer Normalverteilung

$$p(x_j|\sigma, \mathcal{B}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-x_j)^2}{2\sigma^2}} \ . \tag{2}$$

Alle Messungen haben dasselbe Fehlerniveau σ.

a) Ermitteln Sie die Likelihoodfunktion $p(\underline{\mathrm{x}}|x, \sigma, \mathcal{B})$. Welcher Wert für x maximiert die Likelihoodfunktion (Maximum-Likelihood-Schätzwert). Formen Sie die Ausdrücke so um, dass sie nicht mehr von den einzelnen Messwerten, sondern nur noch von Stichprobenmittelwert und Stichprobenvarianz abhängen.

b) Wie lautet die Posterior-Wahrscheinlichkeit $p(x|\underline{\mathrm{x}}, \sigma, \mathcal{B})$ unter der Annahme, dass alle Werte von x a priori gleich wahrscheinlich sind?

c) Wir gehen nun davon aus, dass wir zwar wissen, dass die experimentellen Fehler normal verteilt sind, wir die Varianz aber nicht kennen. Wir sind also an $p(x|\underline{\mathrm{x}}, \mathcal{B})$ interessiert. Verwenden Sie das Bayes'sche Theorem und die Marginalisierungsregel, um diese Größe zu ermitteln. Die darin vorkommende Prior-Wahrscheinlichkeit für die Standardabweichung $p(\sigma|\mathcal{B})$ ist durch Jeffreys' Prior gegeben $p(\sigma|\mathcal{B}) = \frac{1}{\sigma}$. Hierbei wird folgendes Integral auftreten:

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma}{\sigma}\, \sigma^{-N}\, e^{-\frac{t}{\sigma^2}} = t^{-N/2}\, \frac{\Gamma(N/2)}{2} \tag{3}$$