Temperaturverteilung auf einer homogenen Platte

Ch. Sommer, H. Sormann und W. Kernbichler

30. Januar 2002

Inhaltsverzeichnis

1 Kurzbeschreibung

Gegeben ist eine ebene homogene Platte, auf deren Rand ein Temperaturprofil eingeprägt ist. Entsprechend diesem Profil stellt sich auf der Platte eine bestimmte, stationäre Temperaturverteilung ein.
Diese Temperaturverteilung wird durch eine numerische Lösung der zweidimensionalen Laplace-Gleichung bestimmt, wobei als Lösungsmethode die Differenzenmethode verwendet wird. Für die numerische Auswertung der auftretenden linearen Gleichungssysteme mit schwach-besetzten Koeffizientenmatrizen wird die auf dem Gauss-Seidel-Verfahren beruhende Überrelaxationsmethode eingesetzt.

2 Programmbeschreibung

Das Programm bietet den Studierenden die folgenden Möglichkeiten:

- Ein Testbeispiel mit fix vorgegebenem Temperaturprofil erlaubt das Experimentieren mit verschiedenen Parametern der Differenzen- bzw. Gauss-Seidel-Methode (variable Zahl von Stützpunkten, variable Genauigkeit des Ergebnisses, Ein- und Ausschalten der Relaxation, ...).

  Die grafische Darstellung der Ergebnisse ermöglicht es, die numerisch erhaltene Temperaturverteilung mit der exakten analytischen Lösung zu vergleichen.

  Was die Art der grafischen Darstellung betrifft, können die Möglichkeiten des MATLAB-Angebotes (verschiedene Arten von 3D-Darstellungen, Konturplots, ...) ausgenützt werden.

- Es können auch benutzer-definierte Probleme gelöst werden, zumindest was die Temperaturkurve am Rand des (fixen) Grundgebietes betrifft. Dazu kann das Temperaturprofil an 12 vorgegebenen Punkten beliebig variiert werden, wobei eine bequeme grafische Eingabe geboten wird. Die eingestellten 12 Temperaturwerte werden vom Programm zu einer stetigen Temperaturkurve verbunden: dies geschieht wahlweise mittels linearer Interpolation oder mittels einer Hermite-Interpolation. Auch in diesem Fall kann man die Entwicklung der numerisch ermittelten Verteilung von der (fix vorgegebenen) Startverteilung bis zum Erreichen der Gauss-Seidel-Konvergenz in einem Grafikfenster miterleben".

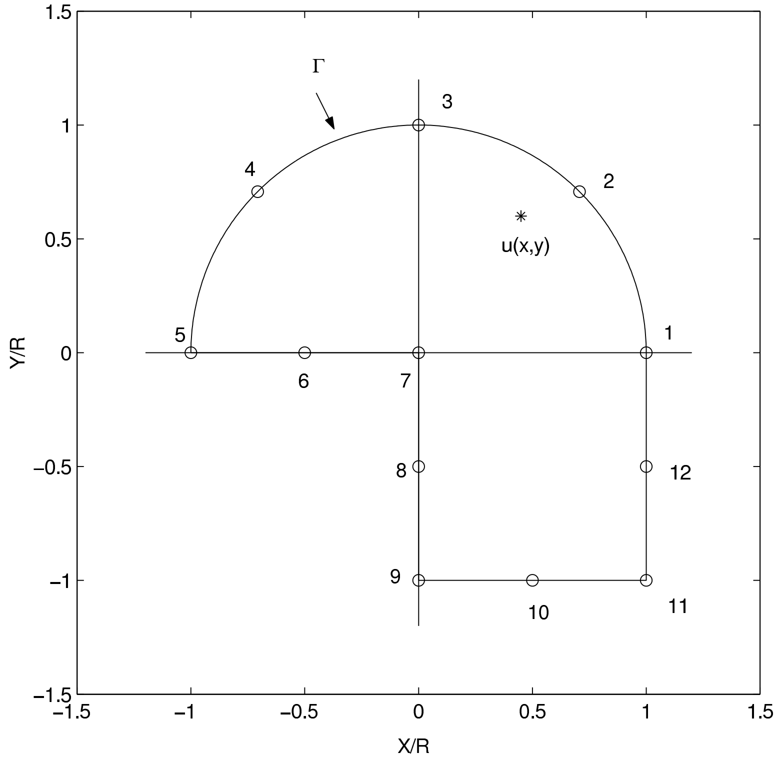

Abbildung 1: Geometrie des Dirichlet-Problems.

3 Theoretische Grundlagen

Gegeben sei eine ebene homogene Platte (das Grundgebiet), an deren Rand ein Temperaturprofil vorgegeben ist (Abb. 1). Entsprechend diesem Profil wird sich auf der Platte eine bestimmte Temperaturverteilung einstellen.

$u(x, y)$ sei die Temperatur auf der Platte im Punkt (x, y). Wenn es im Inneren des Grundgebietes keine Wärmequellen gibt, gehorcht die Temperaturverteilung der homogenen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0 \quad . \tag{1}$$

Der Differential-Operator $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ ist der zweidimensionale Laplace-Operator, und die elliptische Differentialgleichung (1) heißt dementsprechend die zweidimensionale Laplace-Gleichung.

Das der Platte aufgeprägte Temperaturprofil wird durch die Randbedingung

$$u(x, y) \mid_{x,y\in\Gamma} = \varphi(x, y) \tag{2}$$

beschrieben, wobei Γ die Randkurve des Grundgebietes bedeutet.

Die Gleichungen (1) und (2) definieren eine inhomogene, partielle Randwertaufgabe zweiter Ordnung. Auf Grund der Form der gegebenen Randbedingung spricht man von einem *Dirichletschen Problem*.

4 Das Differenzenverfahren

Ein einfaches und leistungsfähiges numerisches Verfahren zur Lösung dieses Problems stellt die auf Euler zurückgehende *Differenzenmethode* (auch *Gitterpunktmethode*) dar.

Als erster Schritt wird der Funktionsraum diskretisiert, indem man über das Grundgebiet ein zweidimensionales quadratisches Punktgitter (Gitterkonstante h) legt.

Nun werden alle Gitterpunkte, die im Inneren des Grundgebietes liegen (innere Gitterpunkte oder Netzpunkte) geeignet durchnumeriert. Der $i-$te von insgesamt i_{max} Gitterpunkten habe die Koordinaten $x_i; y_i$.

Nun werden an jedem inneren Gitterpunkt die Differential-Quotienten in der Laplace-Gleichung durch entsprechende Differenzen-Quotienten ersetzt. Im gegebenen Programm werden dafür die einfachen "Dreipunkt-Formeln"

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} |_{x_i;y_i} \approx \frac{u_{i,r} - 2u_i + u_{i,l}}{h^2} \tag{3}$$

beziehungsweise

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} |_{x_i;y_i} \approx \frac{u_{i,o} - 2u_i + u_{i,u}}{h^2} \quad . \tag{4}$$

verwendet.

Setzt man (3) und (4) in die Dgl. (1) ein, so erhält man für den i-ten Punkt die *Differenzengleichung*

$$4u_i - u_{i,l} - u_{i,r} - u_{i,o} - u_{i,u} = 0 \qquad (i = 1, ..., i_{max}) \quad . \tag{5}$$

In (5) bedeutet u_i den Funktionswert der gesuchten Lösungsfunktion für den i-ten Gitterpunkt, und die Indizes l, r, o und u beziehen sich auf den *linken*, *rechten*, *oberen* und *unteren* Nachbarn dieses Punktes.

Die Gesamtheit aller Differenzengleichungen bildet ein *homogenes, lineares Gleichungssystem.*

Inhomogene Elemente kommen über jene Gitterpunkte ins Spiel, die nicht nach allen 4 Seiten einen Gitterpunkt als Nachbarn haben. Solche fehlenden Nachbarpunkteliegen entweder auf der Randkurve, wenn das Gitter genau in das Grundgebiet hineinpaßt, wie das entlang der geradlinigen Begrenzungen (Punkte 5→12→1) der Fall ist, oder sie liegen außerhalb des Grundgebietes, z. B. außerhalb der Kreislinie (Punkte 1→5). In letzterem Fall wird der Funktionswert an den fehlenden Nachbarpunktenünter Verwendung der nächstliegenden Randwerte linear extrapoliert.

In jedem Fall führen fehlende Nachbarpunkte zu inhomogenen Differenzengleichungen. Insgesamt erhält man also für die u_i ein inhomogenes, lineares Gleichungssystem mit einer für Differenzenverfahren charakteristischen *schwach-besetzten* Koeffizientenmatrix mit bandförmiger Struktur. Zur numerischen Auswertung solcher Systeme eignet sich ganz besonders das Gauss-Seidel- Verfahren.

4.1 Das Testbeispiel

Dieses Beispiel erlaubt einen Vergleich der numerisch ermittelten Werte mit analytischen Lösungen. Gesucht sind die Lösungen von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

im Grundgebiet Abb.1, $R = 4$ mit den folgenden Randbedingungen:

$$u(x, y) \mid_{\Gamma: A \to B} = x^2 y^2$$

$$u(x, y) \mid_{\Gamma: B \to C} = 32 - \frac{x^4}{8}$$

$$u(x, y) \mid_{\Gamma: C \to D} = 32 - \frac{y^4}{8}$$

$$u(x, y) \mid_{\Gamma: D \to E} = 12x^2 - \frac{x^4}{8}$$

$$u(x, y) \mid_{\Gamma: E \to A} = 12y^2 - \frac{y^4}{8}$$

Die analytische Lösung dieses Beispiels lautet:

$$u_{exakt}(x, y) = x^2 y^2 + \frac{1}{8} \left[256 - \left(x^2 + y^2 \right)^2 \right]$$