Anwendung der Multipolentwicklung

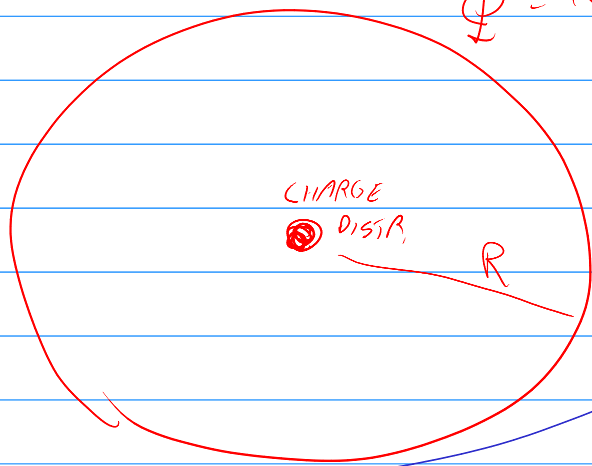
Das Potential einer unbekannten Ladungsanordung, die sich in einem infinitesimalen Volumen (bei $\mathbf{r} = 0$) befindet wird auf der Oberfläche einer (imaginären) Kugel mit dem Radius R gemessen, deren Mittelpunkt bei $\mathbf{r} = 0$ liegt. Auf dieser Oberfläche lautet das Potential (in Kugelkoordinaten)

$$\Phi(R, \theta, \phi) = a(\cos\theta)^2 \ . \tag{1}$$

a) Bestimmen Sie das Potential der Ladungsanordnung im ganzen Raum.
   Hinweis: Φ genügt der Laplace-Gleichung überall außer bei $\mathbf{r} = 0$ und verschwindet bei $\mathbf{r} \to \infty$. Sie können also die Entwicklung der allgemeinen Lösung der Laplace-Gleichung nach Kugelfunktionen benutzen und diese Bedingung benutzen. (Die Anwesenheit der Ladungen bei $\mathbf{r} = 0$ wird von der Singularität von $\Phi(\mathbf{r} \to 0)$ signalisiert). Bestimmen Sie dann die Koeffizienten, so dass Gl. (1) erfüllt ist.
   2. Hinweis: Wenn Sie genau die erste Paar Kugelfunktionen ($l = 0, 1, 2$ nur mit $m = 0$!) betrachten, müssen Sie möglicherweise keinen Integral durchführen, um die Koeffizienten zu bestimmen!

b) Um diese Ladungsanordnung werde eine metallische Kugeloberfläche mit dem Radius ρ und mit Mittelpunkt in $\mathbf{r} = 0$ gelegt. Die Kugeloberfläche sei geerdet, also habe Potential $\Phi = 0$. Berechnen Sie das Potential innerhalb der Kugel.
   3. Hinweis: Entwickeln Sie ebenfalls das Feld in Kugelkoordinaten. Diesmal besteht das Gesamtfeld aus den unter Punkt (a) berechneten Termen plus einem Beitrag aus den Ladungen auf der Kugeloberfläche. Dieser letzte Beitrag erfüllt ebenfalls die Laplace-Gleichung aber muss in $\mathbf{r} = 0$ regulär sein !

MESSUNG: $\Phi = |a \cos\Theta|^2$



$\Phi(r \to \infty) = 0$

(a)

$$\Phi = \sum \left(\cancel{A_{\ell m} r^{\ell}} + B_{\ell m} r^{-\ell-1} \right) Y_{\ell m}(\Theta, \varphi)$$

$$R^{-\ell-1} B_{\ell m} = \int d\cos\Theta \, d\varphi \; Y_{\ell m}(\Theta,\varphi)^* \; \Phi(R, \Theta, \varphi)$$

OBSERVE $\quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \, \frac{3}{2} \left(\cos^2\Theta - \frac{1}{3} \right)$$

ABSORBE IN $B_{\ell m} \to b_{\ell m}$

$$\Phi(R) = R^{-1} b_{00} \cdot 1 + R^{-3} b_{20} \left(\cos^2\Theta - \frac{1}{3} \right)$$

$$\overset{!}{=} a^2 \cos^2\Theta$$

$$\Rightarrow \quad b_{00} = a^2 R \, \frac{1}{3} \qquad b_{20} = a^2 R^3$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\Phi(r) = \frac{a^2}{3} \frac{R}{r} + a^2 \left(\frac{R}{r} \right)^3 \left(\cos^2\Theta - \frac{1}{3} \right)}$$

This fuss can be skipped if you are clever and absorbe the coefficients in the b_lm

$$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}\,Y_{20} = \cos^2\theta - \frac{1}{3} = \cos^2\theta - \frac{\sqrt{4\pi}}{3}\,Y_{00}$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(R) = a^2\,\frac{\sqrt{4\pi}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,Y_{20} + Y_{00}\right)$$

$$= \sum_{\ell m} R^{-\ell-1}\,B_{\ell m}\,Y_{\ell m}$$

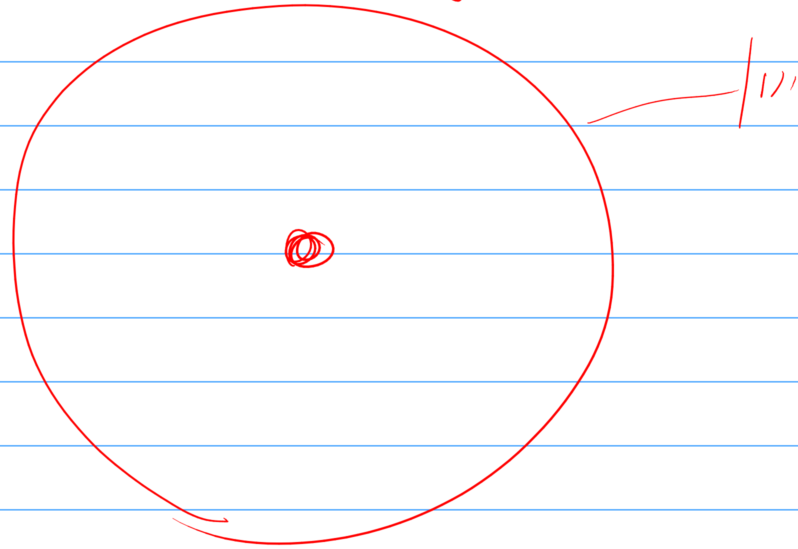
$$\Rightarrow \quad B_{00} = R\,a^2\,\frac{\sqrt{4\pi}}{3}$$

$$B_{20} = R^3\,a^2\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{4\pi}{5}}$$

$$\Phi = a^2\,\frac{R}{r}\,\frac{1}{3} + a^2\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)$$

(b)

$$\Phi_{TOT} = \Phi_q + \Phi_{MET} = 0$$



$$\Phi_q(r) = \frac{q^2}{3}\frac{R}{r} + q^2\left(\frac{R}{r}\right)^3\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Phi_{MET}(r) = \sum_{\ell m} A_{\ell m}\, r^{\ell}\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$= a_{00}\, r^0 + a_{20}\, r^2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Phi_q(\rho) + \Phi_{MET}(\rho) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{00} = -\frac{q^2}{3}\frac{R}{\rho} \qquad a_{20} = -q^2\frac{R^3}{\rho^5}$$

$$\Phi_{TOT} = R\frac{q^2}{3}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\rho}\right) + q^2\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)R^3\left(\frac{1}{r^3} - \frac{r^2}{\rho^5}\right)$$