Kapitel 1

Beispiele linearer Randwertprobleme

Die Problemstellung wird zuerst an einigen Beispielen aus der Physik erläutert. Die Methode der Greenschen Funktion verwendet eine Superposition von partikulären Lösungen. Daher müssen die Differentialgleichungen linear sein.

1.1 Elektrostatik

Quellen des elektrischen Feldes (genauer der dielektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D}$) sind die Ladungen bzw. die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} div\ \vec{D} &= \rho(\vec{r}), \qquad (1.1) \\ \vec{D} &= \varepsilon \vec{E}. \qquad (1.2) \end{aligned}$$

Das elektrische Feld $\vec{E}$ ist wirbelfrei, kann daher aus einem Potential Φ abgeleitet werden :

$$rot\ \vec{E} = 0, \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\ grad \Phi. \qquad (1.3)$$

Wir nehmen an, die Dielektrizitätskonstante sei im ganzen Raum konstant (z.B. $\varepsilon = \varepsilon_0$). Einsetzen von G1n. (2) und (3) in Gl. (1) gibt die lineare Differentialgleichung (**Poissongleichung**)

$$\Delta \Phi = -\ \rho(\vec{r})/\varepsilon. \qquad (1.4)$$

Gl.(4) allein bestimmt die Lösungsfunktion Φ nicht eindeutig. Es müssen noch Randbedingungen dazugefügt werden; z.B. handelt es sich um eine Ladungsverteilung im freien Raum, wobei die Ladungsverteilung auf ein endliches Gebiet beschränkt ist, dann muss Φ im Unendlichen verschwinden:

$$\lim_{r \to \infty} \Phi(\vec{r}) = 0. \qquad (1.5)$$

Befindet sich im Raum eine metallische Fläche $\mathcal{F}$, dann müssen die elektrische Feldkomponenten, die zu $\mathcal{F}$ tangentiell sind, Null sein; dies kann oft erfüllt werden, indem man fordert, dass Φ längs $\mathcal{F}$ Null ist (s.Fig.1.1 a)):

$$\vec{E}_{\text{tang}} = 0, \quad \Rightarrow \quad \Phi = 0 \qquad \text{längs } \mathcal{F}. \qquad (1.6)$$

Die Randwertaufgabe besteht darin, dass zur gegebenen Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ eine Funktion $\Phi(\vec{r})$ gefunden werden soll, die die Differentialgleichungen (4) löst und die Randbedingungen (z.B. (5) oder (6) mit vorgegebenen $\mathcal{F}$) erfüllt. Gln. (5) oder (6) heißen **homogene Randbedingungen.**

Abbildung 1.1: a) Links: Inneres Randwertproblem innerhalb einer ideal leitenden Fläche.
b) Rechts: Äusseres Randwertproblem ausserhalb eines Isolators

Eine **inhomogene Randbedingung** liefert die folgende Problemstellung: Wir machen die Annahme, dass Ladungen auf einer Oberfläche $\mathcal{F}$ verteilt sind (s.Abb.1.1 b)). Deren Verteilung wird durch die Oberflächenladungsdichte $\eta(\vec{r}_{\mathrm{Fl}})$ beschrieben, während die räumliche Ladungsdichte $\rho(\vec{r}) = 0$ ist. Gl.(4) geht dann in die Laplace- oder Potentialgleichung über:

$$\Delta\Phi \; = \; 0. \tag{1.7}$$

Die dielelektrische Verschiebung (bzw. das gesuchte Potential Φ) müssen längs der Fläche $\mathcal{F}$ der Randbedingung

$$\vec{r} \; = \; \vec{r}_{\mathrm{Fl}}: \qquad \vec{n}\cdot\vec{D} \; = \; \eta \quad \Rightarrow \quad \vec{n}\cdot\nabla\Phi \; = \; \frac{\partial\Phi}{\partial n} \; = \; -\,\frac{\eta}{\varepsilon} \tag{1.8}$$

und im Unendlichen der Randbedingung (1.5) genügen. ε ist die Dielektrizitätskonstante des Raumes, der den Isolator umgibt und sich bis ins Unendliche erstreckt.

1.2 Die schwingende Saite als Beispiel eines Eigenwertproblems

Eine Saite ist ein Draht ohne Biegungssteife, der zwischen zwei festen Endpunkten eingespannt ist. Daher besteht in der Ruhelage eine Spannung S, die senkrecht auf den einzelnen überall gleich groen Querschnitt q steht, also die Richtung der Saite hat. Wenn die Saite aus der Ruhelage herausgezogen wird, dann haben die in den Endpunkten eines Linienelementes $(x, x+dx)$ der Saite gezogenen Tangenten etwas verschiedene Richtungen, die Resultierende der am Linienelement angreifenden Spannung hat eine zur Gleichgewichtslage gerichtete Komponente F_u (Abb.1.2) Beim Herausziehen aus der Ruhelage wird die Saite auch verlängert, die damit verbundene Erhöhung der Spannung ist aber von höherer Ordnung klein als die erstgenannte.

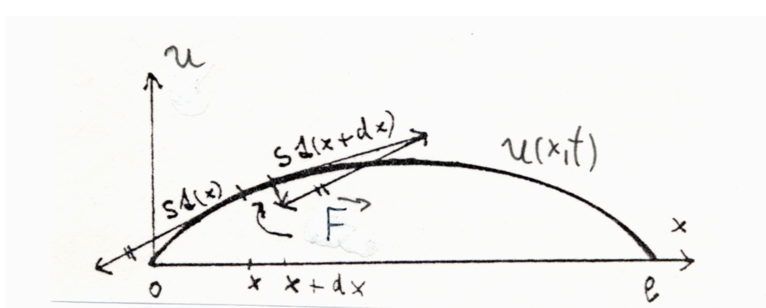

Abbildung 1.2: Kräfte am Element einer Saite.

Am Linienelement dx greifen links (x) und rechts ($x+dx$) folgende Kräfte an ($\vec{t}$ Tangentenvektor, q Saitenquerschnitt):

$$\begin{array}{rlrcl} x: & -\,qS\ \vec{t}(x), & \vec{t}(x) & = & (\cos\alpha, \sin\alpha); \\ x+dx: & -\,qS\ \vec{t}(x+dx), & \vec{t}(x+ds) & = & (\cos(\alpha+d\alpha), \sin(\alpha+d\alpha)). \end{array}$$

Für die Resultierende ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} F_x & = & qS\ \cos(\alpha+d\alpha)\ -\ qS\cos\alpha, \\ F_u & = & qS\ \sin(\alpha+d\alpha)\ -\ qS\sin\alpha, \end{array}$$

Für kleine Verrückungen ist α klein; daher die Näherung:

$$\cos\alpha\ \approx\ 1, \qquad \sin\alpha\ \approx\ \alpha.$$

Damit wird die Änderung der Spannung S klein gegen die schon vorhandene Spannung. Bei Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung wird die Resultierende in der Querrichtung:

$$F_u\ =\ qS\left[\left(\frac{du}{dx}\right)_{x+dx}\ -\ \left(\frac{du}{dx}\right)_x\right]\ =\ q\ S\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\ dx.$$

Diese Kraft beschleunigt das Linienelement (Masse $m=\rho q\ dx,\ \rho=$ Massendichte):

$$\rho q\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\ dx\ =\ qS\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\ dx,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ -\ \frac{\rho}{S}\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\ =\ 0. \tag{1.9}$$

Dies ist wieder eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, Doch beschreibt diese allein noch nicht vollständig die physikalischen Bedingungen, denen eine Saite unterworfen ist. Diese ist an den Enden eingespannt; sie kann sich in u-Richtung nicht bewegen. Dies wird ausgedrückt durch die beiden **Randbedingungen**:

$$\begin{array}{rl} x=0: & u=0, \\ x=\ell: & u=0, \end{array} \qquad \text{für alle Zeiten}\ \ t\ . \tag{1.10}$$

Die vorvorige Gleichung wird umgeschrieben zu:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ -\ \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\ =\ 0. \tag{1.11}$$

$$\text{mit} \qquad c^2\ =\ \frac{S}{\rho}. \tag{1.12}$$

Die obige Differentialgleichung, (1.11), heißt die **Wellengleichung** mit der Phasengeschwindigkeit c. Hier hängt diese von der Größe $\sqrt{S/\rho}$ ab. Gln.(1.11) und (1.10) beschreiben die freien Schwingungen einer Saite.

Wirkt auf die Saite eine zeitabhängige Kraft (z.B wird sie durch Streichen mit einem Geigenbogen zu Schwingungen angeregt), dann gilt statt Gl.(1.11) die folgende inhomogene Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\ -\ \frac{1}{c^2}\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\ =\ -\ g(x,t). \tag{1.13}$$

$g(x,t)$ ist als Funktion beider Argumente vorgegeben. Da Gln.(1.11) und (1.13) eine zeitliche Entwicklung beschreiben, müssen auch noch Anfangsbedingungen:

$$t=0: \qquad u(x,0)=\chi_0(x), \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\ =\ \chi_1(x) \tag{1.14}$$

mit gegebenen Funktionen $\chi_0(x)$ und $\chi_1(x)$, die die Anfangslage und -geschwindigkeit der Saite beschreiben, hinzutreten, damit die Lösung eindeutig bestimmt ist. Wieder ist eine Funktion $u(x,t)$ gesucht, die die Differentialgleichung (1.13), die Randbedingungen (1.10) und die Anfangsbedingungen (1.14) erfüllt.

Man kann sich vorstellen, dass die Saite nur an einem Endpunkt, (z.B. $x = \ell$), angeregt wird. Dieses Problem wird durch die homogene Differentialgleichung (1.11) mit den inhomogenen Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u(\ell,t) \;=\; h(t) \tag{1.15}$$

($h(t)$ gegeben) und den Anfangsdaten (1.14) beschrieben und gelöst durch eine Funktion $u(x,t)$, die den drei Gleichungen (1.11), (1.14) und (1.15) genügen muss.

Sehr häufig wird vorgeschrieben, dass das zeitliche Verhalten der Bewegung der Saite durch einer harmonischen Schwingung mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$ entsprechen soll. Dann gilt (α eine irrelevante Phasenkonstante)

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \phi(x)\ \cos(\omega t + \alpha) \\ g(x,t) &= g_0(x)\ \cos(\omega t + \alpha) \\ h(t) &= h_0\ \ \ \ \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \tag{1.16}$$

Damit gehen Gln.(1.10) (1.13) und (1.15) über in:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\,\phi \;=\; 0, \tag{1.17}$$

$$k \;=\; \omega/c; \tag{1.18}$$

$$\phi(0) \;=\; 0, \quad \phi(\ell) \;=\; 0; \tag{1.19}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2\,\phi \;=\; -\,g_0(x); \tag{1.20}$$

$$\phi(0) \;=\; 0, \quad \phi(\ell) \;=\; h_0. \tag{1.21}$$

Gl.(1.17) beschreibt zusammen mit Gl.(1.19) eine freie harmonische Schwingung der eingespannten Saite. Solche sind aber nur für bestimmte Eigenfrequenzen $\nu_n = \omega_n/2\pi$ möglich. Wird nämlich die allgemeine Lösung von (1.17)

$$\phi(x) \;=\; A\ \sin(kx) \;+\; B\cos(kx)$$

der ersten Randbedingung (1.19) unterworfen, so folgt

$$\phi(0) \;=\; A\ \sin(0) \;+\; B\cos(0) \;=\; B \stackrel{!}{=} 0.$$

Die verbleibende Lösung $\phi(x) \;=\; A\ \sin(kx)$ kann nicht für beliebiges k die zweite Randbedingung (1.19)

$$\phi(\ell) \;=\; A\ \sin(k\ell) \;\stackrel{!}{=} 0. \tag{1.22}$$

erfüllen, wenn von der trivialen Lösung $A = 0,\ \rightarrow\ \phi = 0$ (Saite immer in Ruhe) abgesehen wird. Nichttriviale Lösungen ergeben sich nur für die Werte k_n definiert durch

$$k_n\ell \;=\; n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots\,, \tag{1.23}$$

$$\phi_n(x) \;=\; A_n\ \sin(k_n x) \;=\; A_n\ \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right). \tag{1.24}$$

k_n in Gl.(1.23) sind die unendlich vielen Eigenwerte des homogenen Randwertproblems (1.17) und (1.19). Die zum **Eigenwert** k_n gehörige Lösung $\phi_n(x)$, Gl.(1.24), heißt **Eigenfunktion** und

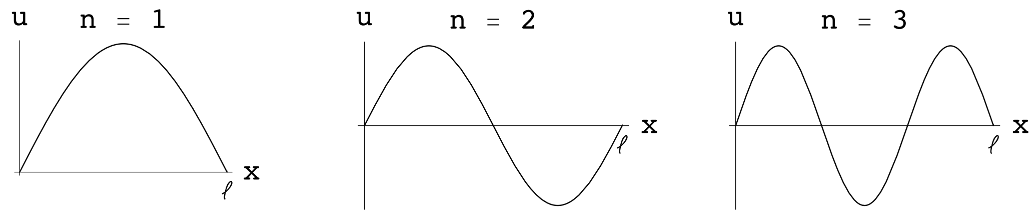

Abbildung 1.3: Die Grundschwingung und die ersten beiden Oberschwingungen einer an den Enden eingespannten Saite.

gibt die Eigenschwingungen der Saite. (Abb.1.3). Diese Eigenschwingungen sind durch die physikalischen Parameter der Saite (Massendichte ρ, Spannung S, Länge ℓ) festgelegt. Die Amplitude A_n der Schwingungen (1.24) bleibt dabei unbestimmt. - Sie wird bestimmt durch die anfängliche Anregung, die aber durch die Gln.(1.17) und (1.20) nicht erfasst werden kann.

Es ist ganz allgemein so, dass ein homogenes Randwertproblem (bei endlich räumlichen Gebiet) nur für bestimmte Werte, eben die Eigenwerte, des in den Gleichungen enthaltenen charakteristischen Parameters (in Gln.(1.17), (1.20) ist dies k) Lösungen (= Eigenfunktionen) besitzt. Im Gegensatz dazu ist das inhomogenen Randwertproblem im allg. nur dann lösbar, wenn der charakteristische Parameter mit keinem Eigenwert zusammenfällt. z.B erhält man mittels (1.16) aus Gl.(1.20)

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} + k^2 \phi = - g_0(x)$$

Diese Gleichung mit den Randbedingungen (1.19) ist im allg. nur lösbar, wenn k mit keinem der Eigenwerte k_n aus Gl.(1.23) zusammenfällt; denn für $k = k_n$ erhält man als Lösung eine Eigenfunktion aus Gl.(1.24). Diese ist eine Lösung der homogenen Gl.(1.17) und kann daher nicht gleichzeitig Gl.(1.20) erfüllen. Physikalisch bedeutet die vorhin genannte Bedingung, dass die Kreisfrequenz ω der Anregung mit keiner der Eigenfrequenzen ω_n zusammenfallen darf, sonst kommt es zu Resonanz. Gl.(1.20) gilt nicht mehr, weil sie unter Vernachlässigung der Reibung abgeleitet worden ist. Das Gleiche gilt für das inhomogene Randwertproblem, das durch die homogenen Differentialgleichung (1.11) und die gemäß (1.16) aus Gl.(1.15) folgenden inhomogenen Randbedingungen

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(\ell) = h_0$$

beschrieben wird. Wiederum kann die Eigenfunktion aus Gl.(1.24), zu der man mit Notwendigkeit geführt wird und die die homogenen Randbedingungen (1.19) erfüllt, nicht auch die obige inhomogene Randbedingung befriedigen.

Literatur:

G. Joos: Lehrbuch der Theoretischen Physik, IV, 8.

1.3 Schallschwingungen im dreidimensionalen Raum

Für kleine Schwingungen (lineare Näherung) in einem Gas wird das Schallfeld durch die Schallgeschwindigkeit $\vec{v}$ beschrieben. Diese kann aus einem Geschwindigkeitspotential Φ abgeleitet werden. (s./7/):

$$\vec{v} = - grad\Phi. \tag{1.25}$$

Ebenso kann der Schalldruck p aus Φ abgeleitet werden

$$p \;=\; \rho_0 \,\frac{\partial \Phi}{\partial t}; \tag{1.26}$$

ρ_0 ist die statische Dichte des Gases. Φ gehorcht der Wellengleichung

$$\Delta\Phi \;-\; \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} \;=\; 0. \tag{1.27}$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c ist definiert durch:

$$c^2 \;=\; \frac{\partial p}{\partial \rho} \;=\; \frac{\gamma p_0}{\rho_0}; \tag{1.28}$$

p_0 ist der statische Druck, γ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmekapazität (Adiabatenexponent). Die Forderung harmonischer Zeitabhängigkeit führt zur Helmholtzgleichung:

$$\Phi(\vec{r},t) \;=\; \phi(\vec{r})\;\cos(\omega t \;+\; \alpha), \tag{1.29}$$

$$\Delta\phi \;+\; k^2\;\phi \;=\; 0. \tag{1.30}$$

$$\text{mit} \qquad k \;=\; \omega/c.$$

Die Anregung von Schwingungen wird durch inhomogene (Φ nicht enthaltende) Terme $g(r,t)$ bzw. $g_0(r)$ auf der rechten Seite von Gl.(1.27) bzw. (1.30) oder durch inhomogene Randbedingungen beschrieben. Letztere Möglichkeit ist hier sogar meist zutreffender. Man denke an die Schallerzeugung durch die Membran eines Lautsprechers. Befindet sich der Schallsender in einem homogenen unendlich ausgedehnten Gas, dann muss Φ (damit auch ϕ) im Unendlichen gegen Null gehen. Doch genügt hier bei der Wellen- bzw. Helmholtzgleichung diese Randbedingung nicht für die Eindeutigkeit der Lösung, es muss noch eine **"Ausstrahlungsbedingung"** (s. Kap.11) hinzukommen, die im Unendlichen nur solche Lösungen zuläßt, die auslaufenden Wellen entsprechen.

Wird das Gas von Flächen begrenzt, hängen die Randbedingungen von de Eigenschaften dieser Flächen ab. Bei schallharten Grenzflächen (z.B. der Wand eines Rohres) ist die Normalkomponente der Schallströmung Null, wegen Gl.(1.25) gibt dies für das Geschwindigkeitspotential folgenden Randbedingung:

$$\mathcal{F} \quad \text{schallhart:} \qquad v_\perp \;=\; 0, \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} \;=\; 0 \quad \text{längs } \mathcal{F}. \tag{1.31}$$

An schallweichen Begrenzungsflächen (z.B. am Ende eines offenen Rohres) verschwindet der Druck. Wegen Gl.(1.26) gibt dies für Φ:

$$\mathcal{F} \quad \text{schallweich:} \qquad p \;=\; 0, \quad \rightarrow \quad \Phi \;=\; 0 \quad \text{längs } \mathcal{F}. \tag{1.32}$$

Diese Randbedienungen sind manchmal nur Grenzfälle der allgemeinen homogenen Randbedingung:

$$a\;\Phi \;+\; b\,\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \;0 \quad \text{längs } \mathcal{F}. \tag{1.33}$$

mit gegebenen konstanten a und b.

Schließt die Randfläche $\mathcal{F}$ ein Raumgebiet vollständig ein, spricht man von einem Hohlraum. Für zeitlich harmonische Schwingungen gibt es im Inneren dieses Hohlraumes Eigenschwingungen, die den Eigenwerten k_n von Gl.(1.30) für eine längs $\mathcal{F}$ vorgegeben Randbedingung (1.31) bis (1.33) entsprechen. Wieder ist das inhomogene Problem im allgemeinen nicht lösbar, wenn k mit einem dieser Eigenwerten zusammenfällt.

1.4 Wärmeleitung

1.4.1 Die Wärmeleitungsgleichung

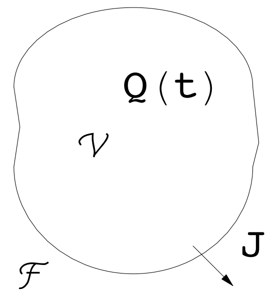

Abbildung 1.4: Wärmebilanz im Volumen $\mathcal{V}$

$Q(t)$ Wärmeengerie im Volumen $\mathcal{V}$, das von der Fläche $\mathcal{F}$ umschlossen ist. J Wärmestrom durch die Oberfläche $\mathcal{F}$. N Ergiebigkeit der Quellen in $\mathcal{V}$. Der Strom durch die Oberfoäche = Ergiebigkeit der Quellen - Abluss J in $\mathcal{V}$ ergeben folgende Bilanz:

$$J \;=\; N \;-\; \dot{Q} \tag{1.34}$$

Alle drei globalen Größen in der obigen Gleichungen werden nun durch Integrale über lokale Größen ausgedrückt. Die Wärmemenge und die Leistung sind dann:

$$Q(t) \;=\; \int\!\!\int_{\mathcal{V}}\!\!\int d\vec{r}\; \mu(\vec{r})\; q(\vec{r},t), \tag{1.35}$$

$$N(t) \;=\; \int\!\!\int_{\mathcal{V}}\!\!\int d\vec{r}\; \nu(\vec{r},t). \tag{1.36}$$

μ ist die Massendichte, μq die Wärmedichte, ν die Leistungsdichte. Der Strom durch die Randfläche $\mathcal{F}$ wird mittels des Gaussschen Satzes in ein Volumsintegral umgerechnet:

$$J \;=\; \int\!\!\int_{\mathcal{F}} d\vec{F}\cdot\vec{j}(\vec{r},t) \;=\; \int\!\!\int_{\mathcal{V}}\!\!\int d\vec{r}\; \mathrm{div}\vec{j}(\vec{r},t). \tag{1.37}$$

Die obigen drei Integrale werden in die Bilanzgleichung (1.34) eingesetzt. Gleichsetzen der Integranden gibt die folgende mikroskopische Bilanzgleichung:

$$\frac{\partial(\mu q)}{\partial t} \;+\; \mathrm{div}\vec{j} \;=\; \nu. \tag{1.38}$$

Weiters wird angenommen, dass die spezifische Wärme c im ganzen Raum konstant ist und auch nicht von der absoluten Temperatur T abhängt. Ebenso wird angemommen, dass die Wärmeleitfähigkeit λ konstant ist:

$$q \;=\; cT \tag{1.39}$$

$$\vec{j} \;=\; \lambda\;\mathrm{grad}T \tag{1.40}$$

Werden diese beiden Gleichungen in 1.38 eingesetzt, ergibt sich die **zeitabhängige Wärmediffusionsgleichung** zur Bestimmung der Temperaturverteilung im Raum:

$$a\;\Delta T(\vec{r},t) \;-\; \tfrac{\partial T}{\partial t} \;=\; -\;\tfrac{\nu(\vec{r},t)}{\mu c}. \tag{1.41}$$

$$a := \tfrac{\lambda}{\mu c} \tag{1.42}$$

ist die **Wärmediffusionskonstante**.

1.4.2 Anfangsbedingung

Da die Temperaturverteilung von der Zeit t abhängt und die obige Wärmediffusionsgleichung von erster Ordnung in der Zeit ist, benötigt man eine Anfangsverteilung der Temperatur:

$$t = 0: \; T(\vec{r}, 0) \; = \; T_0(\vec{r}) \tag{1.43}$$

1.4.3 Randbedingungen und Randwertproblem

Erstreckt sich das Definitionsgebiet bis ins Unendliche, während die Quellen auf einen endlichen Bereich beschränkt sind, dann wird als Randbedingung vorgeschrieben, dass die Temperatur im Unendlichen Null ist:

$$\lim_{|\vec{r}| \to \infty} T(\vec{r}, t) \; = \; 0. \tag{1.44}$$

Ist der betrachtete Körper endlich, dann kann die Temperatur seiner Oberfläche durch eine geeignete Heizung konstant gehalten werden. Durch Wahl einer entsprechenden Skala kann man diesen Wert Null setzen und hat dann die Randbedingung:

$$\vec{r} \; \in \; \mathcal{F}: \quad T \; = \; 0. \tag{1.45}$$

Allgemeiner könnte diese auf der Grenzfläche eingeprägte Temeratur eine gegebene Funktion f_R des Ortes und der Zeit sein:

$$\vec{r} \; \in \; \mathcal{F}: \quad T(\vec{r}, t) \; = \; f_R(\vec{r}, t). \tag{1.46}$$

Wird die Grenzfläche des Körpers sich selbst überlassen, so wird die Wárme durch Strahlung, Leitung und Konvektion an den Aussenraum mit der Temperatur T_a abgegeben. Dies kann in erster, grober Näherung durch das Newtonsche Abkühlungsgesetz beschrieben werden: Der gesamte Wärmeverlust eines Oberflächenelementes $d\mathcal{F}$ während eines Zeitintervalls dt ist proportional der Temperaturdifferenz $T - T_a$, also

$$h \; (T \; - \; T_a) \; d\mathcal{F} \; dt$$

Dies entspricht einem Wärmestrom aus dem Inneren an die Oberfläche, der im gleichen Zeitintervall

$$-J_n \; d\mathcal{F} \; dt \; = \; \lambda \, \frac{\partial T}{\partial n} \; d\mathcal{F} \; dt$$

Gleichsetzen dieser beiden Ansätze gibt bei Skalierung der Temperatur die Bedingung für einen freien ungeschützen Rand:

$$\vec{r} \; \in \; \mathcal{F}: \quad h \, T \; = \; \lambda \, \frac{\partial T}{\partial n} \tag{1.47}$$

Die Konstante h heißt der Koeffizient des äußeren Leitvermögens.

Wenn eine Isolierung vorgegeben ist, dass der Körper keine Wärme abgeben kann, dann ist er "adiabatisch isoliert":

$$\vec{r} \; \in \; \mathcal{F}: \quad \lambda \, \frac{\partial T}{\partial n} \; = \; 0. \tag{1.48}$$

Das Randwertproblem ist im allg. folgendermaßen gestellt: Gegeben sind: $a, \mu, c, \nu(\vec{r}, t)$ und die Randbedingungen. Gesucht ist die Lösung $T(\vec{r}, t)$, die die Differentialgleichung (1.41), die Anfangsbedingung (1.43) und die vorgeschriebenen Randbedingungen erfüllt.

1.5 Elektromagnetische Feldberechnung

1.5.1 Elektromagnetische Feldberechnung mit harmonischer Zeitabhängigkeit

Feldgleichungen

Die Maxwellschen Gleichungen lauten:

$$\mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r}) = i\omega\,\vec{B}(\vec{r}), \tag{1.49}$$

$$\mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r}) = -\,i\omega\,\vec{D}(\vec{r}) + \vec{j}(\vec{r}); \tag{1.50}$$

$$\mathrm{div}(\vec{D}(\vec{r})) = \rho(\vec{r}), \tag{1.51}$$

$$\mathrm{div}(\vec{B}(\vec{r})) = 0. \tag{1.52}$$

Die Zeitabhängigkeit $e^{-i\omega t}$ wurde dabei weggelassen. Im einfachsten Fall ist das Medium zeitlich konstant, dispersionsfrei, linear und homogen:

$$\begin{array}{rclcrcl} \vec{D}(\vec{r}) & = & \varepsilon\,\vec{E}(\vec{r}) & \text{mit} & \varepsilon & = & \text{const.} \\ \vec{B}(\vec{r}) & = & \mu\,\vec{H}(\vec{r}) & \text{mit} & \mu & = & \text{const.} \end{array} \tag{1.53}$$

Randbedingungen

Längs Berandungen $\mathcal{F}$, die aus idealem Metall (unendliche Leitfähigkeit) bestehen, ist das tangentielle elektrische Feld Null:

$$\vec{r} \in \mathcal{F}: \quad \vec{E}_{tang} = 0. \tag{1.54}$$

An der unendlich fernen Grenzfläche des Definitionsgebietes müssen alle Felder die Ausstrahlungsbedingung erfüllen.

Streuung

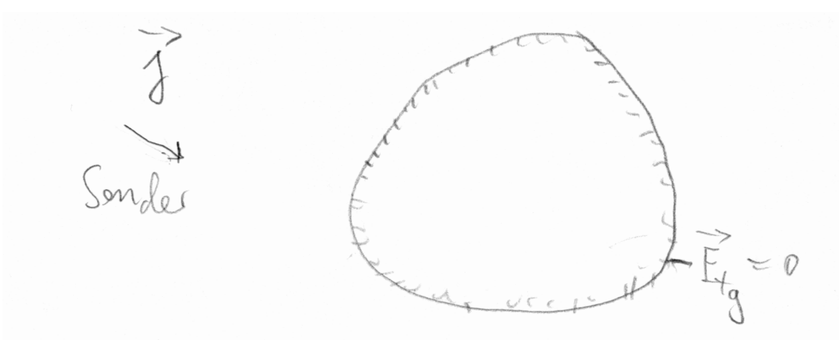

Abbildung 1.5: Das Streuproblem

Statt der beiden Rotorgleichungen kann man auch die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung verwendet werden, die man durch Elimination des magnetischern Feldes erhält:

$$\mathrm{rotrot}\vec{E} - k^2\,\vec{E} = i\omega\mu\,\vec{j}. \tag{1.55}$$

Bei einem Streuvorgang fällt ein elektromagnetisches Feld, das von einer Stromverteilung $\vec{j}(\vec{r})$ emittiert wird, auf einen Körper. Im enfachsten Fall wird angenommen, dass dieser unendlich gut leitend ist. Das Randwertproblem lautet dann: Gegeben sind die Stromdichte $\vec{j}$, μ und ε. Gesucht ist die Lösung $\vec{E}(\vec{r})$, die die obige inhomogene Differentialgleichung und die Randbedingung (1.54) und im Unendlichen die Ausstrahlungsbedingung befriedigt.

1.5.2 Zeitabhängige elektromagnetische Feldberechnung

Ist die Zeitabhängigkeit der Quelldichten $\vec{j}(\vec{r},t),\ \rho(\vec{r},t)$ nicht harmonisch oder periodisch, dann lauten die

Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{E}(\vec{r},t) &= -\frac{\partial \vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t}, && (1.56) \\ \mathrm{rot}\vec{H}(\vec{r},t) &= \frac{\partial \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t} + \vec{j}(\vec{r},t); && (1.57) \\ \mathrm{div}(\vec{D}(\vec{r},t)) &= \rho(\vec{r},t), && (1.58) \\ \mathrm{div}(\vec{B}(\vec{r},t)) &= 0. && (1.59) \end{aligned}$$

Unter den oben angeführten Voraussetzungen für die Materialeigenschaften gelten wieder die gleichen Zusammenhänge (1.53) zwischen den Feldern.

Anfangsbedingungen

Zur Zeit $t = 0$ müssen Feldverteilungen vorgegeben sein:

$$t = 0: \quad \vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r}), \quad \vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_0(\vec{r}) \qquad (1.60)$$

Das Randwertproblem lautet dann: Gegeben sind die Quelldichten $\vec{j}(\vec{r}.t),\ \rho(\vec{r}.t)$, μ und ε. Gesucht ist die Lösung $\vec{E}(\vec{r},t),\ \vec{H}(\vec{r},t)$, die die obigen inhomogenen Differentialgleichungen, die Randbedingung (1.54), im Unendlichen die Ausstrahlungsbedingung und die Anfangsbedingungen befriedigt. Dies heißt auch ein gemischtes Randwertproblem.

In vielen Fällen kann man dieses Problem durch eine Fouriertransformation auf das im §1.5.1 definierte zurückführen.

1.6 Übungsaufgaben

1. Eine homogene Kugel (Radius R, Dichte μ, spezifische Wärme c, Wärmeleitfähigkeit λ) hat die Anfangstemperatur T_0. Sie gibt ihre Wärme an den unendlichen freien Raum ab (h = Koeffizient des äußeren Wärmeleitvermögens). Stellen Sie alle Gleichungen dieses gemischten Randwertproblems auf. Die Lösung dieser Gleichungen ist nicht verlangt.

2. Eine metallische Kugel (Radius R) ist geerdet und trägt die Gesamtladung Q. Stellen Sie alle Gleichungen dieses Randwertproblems auf. Die Lösung dieser Gleichungen ist nicht verlangt.