Kapitel 11

Die Symmetrie der Greenschen Funktion

11.1 Skalare, selbstadjungierte Operatoren

Satz: Für skalare, selbstadjungierte Differentialperatoren mit homogenen Randbedingungen ist die Greensche Funktion in Aufpunkts- und Quellepunktskoordinaten symmetrisch.

Zum selbstadjungierten Differentialoperator

$$L \;=\; L^* \tag{11.1}$$

gehört die folgende, die Greensche Funktion definierende Gleichung:

$$L\; G(x, x') \;=\; -\delta(x - x'); \tag{11.2}$$

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bezeichnet einen Punkt im n-dimensionalen Raum, x' einen anderen. x heißt der **Aufpunkt**, in dem die Wirkung des Vorganges beobachtet wird, dessen allgemeines Gesetz durch den Differentialoperator L beschrieben wird. Diese Wirkung wird ausgelöst von einer punktförmigen Quelle der Stärke 1, die in x', dem **Quellpunkt**, sitzt. Außerdem genügt die Greensche Funktion homogenen Randbedingungen auf der Fläche $\mathcal{F}$, die das Volumen $\mathcal{V}$ umschließt :

$$a\; G \;+ b\, \frac{\partial G}{\partial n} \;=\; 0 \qquad\qquad \text{längs } \mathcal{F}. \tag{11.3}$$

Dann ist die **Greensche Funktion in Quellpunkt und Aufpunkt symmetrisch**:

$$G(x, x') \;=\; G(x', x). \tag{11.4}$$

Es ist eine Folge dieser Symmetrie, daß in vielen (aber nicht in allen !) Fällen die Greensche Funktion von x und x' nur über den Abstand $|x - x'|$ abhängt:

$$G(x, x') \;=\; G(|x - x'|),$$

wie z.B. die Greensche Funktion der Potentialgleichung im dreidimensionalen Raum (vgl. Kap.5):

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \;=\; \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{R} \qquad \text{mit} \qquad R = |\vec{r} - \vec{r}'|\;.$$

Diese Symmetrie der Greenschen Funktion entspricht in gewissem Maße dem Prinzip "actio = reactio". Zwei Punktmassen m_1 und m_2 befinden sich an den Raumpunkten $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$. Dann kann das Wechselwirkungspotential mit Hilfe der eben angeführten Greenschen Funktion in folgender Form angeschrieben werden:

$$V \;=\; -\, m_1 \; m_2 \; G(\vec{r}_1, \vec{r}_2).$$

Die Kraft der Masse m_2 auf die Masse m_1 ist dann durch

$$\vec{F}_{12} \;=\; -\, \nabla_1 V,$$

die der Masse m_1 auf die Masse m_2 durch

$$\vec{F}_{21} \;=\; -\, \nabla_2 V \;=\; \nabla_1 V \;=\; -\, \vec{F}_{12}$$

gegeben. Genauer ist diese behandelt in meinem Skriptum "Analytische Mechanik", §7.2.3; dies findet man im Web: `http://itp.tugraz.at/LV/schnizer/Analytische_Mechanik/`

Als weitere Beispiele dieser Symmetrie zwei aus der Akustik (Skudrzyk, S.381). Abb.11.1, links: an einen grossen Raum ist ein kleiner angefügt. In diesen Räumlen wählt man zwei Punkte 1 und 2. Man hat eine isotrope Schallquelle gegebener Stärke und einen isotropen Empfänger. Wir betrachten jeweils den stationären (eingeschwungenen) Zustand. Einmal sei der Sender im Punkt 1, also im kleinen Raum, der Empfänger in Punkt 2, also im grossen Raum. Dann werden Sender und Empfänger vertauscht. Jedes Mal registriert der Empfänger eine bestimmte Signalstärke. Wegen der obigen Symmetrie ist diese in beiden Fällen gleich:

Punktquelle in 1, Empfänger in 2, Signalstärke G(1,2);
Empfänger in 1, Punktquelle in 2, Signalstärke G(2,1) :

$$G(1,2) \;=\; G(2,1).$$

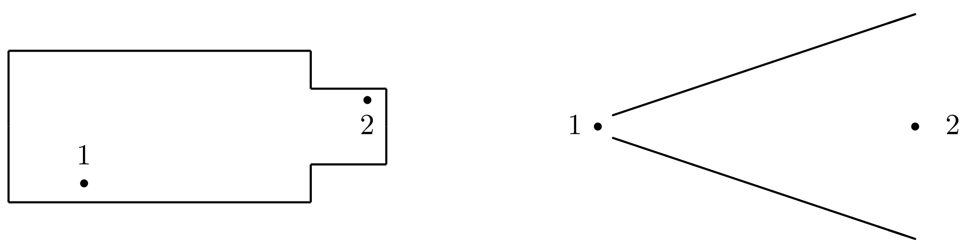

Abbildung 11.1: Links: Schallsender und -empfänger in verschiedenen Teilen eines ungleilchmäßigen Raumes. Rechts: Sprachrohr (Sender (= Mund) in 1, Empfänger in 2) und Höhrrohr (Sender in 2, Empfänger (= Ohr) in 1).

Die gleiche Aussage gilt auch für ein Sprach- bzw. Hörrohr, Abb.11.1, rechts. Die Wirksamkeit des Trichters ist also unabhängig davon, ob der eine durch den Trichter spricht und der andere ohne Trichter hört oder der eine ohne Trichter spricht und der andere mit dem Trichter hört.

Der Beweis der Symmetrie (4) erfolgt für selbstadjungierte Differentialoperatoren mittels des verallgemeinerten Greenschen Satzes (4.11) oder (4.21) oder des normalen 2. Greenschen Satzes.

$$\int\int_{\mathcal{V}}\int (uLv - vLu)\; d\mathcal{V} \;=\; \oint_{\mathcal{F}} d\mathcal{F}\; (\vec{n}\cdot\vec{j}(u,v)). \tag{11.5}$$

$d\mathcal{V} = dx_1 \; dx_2 ... dx_n$. Das Volumen $\mathcal{V}$ wird von der Oberfläche $\mathcal{F}$ umschlossen. Wir identifizieren nun:

$$u = G(x,\xi): \qquad LG(x,\xi) \;=\; -\,\delta(x-\xi); \tag{11.6}$$

$$v = G(x,\eta): \qquad LG(x,\eta) \;=\; -\,\delta(x-\eta). \tag{11.7}$$

Setzt man die längs $\mathcal{F}$ gegebenen Randbedingungen für G, Gl.(8.3), ein, dann verschwindet der Integrand des Oberflächenintegrals auf der rechten Seite von (5). Dies beruht daraus, dass für selbstadjungierte Differentialoperatoren L der zugehörige Strom in u und v antisymmetrisch ist (s.z.B. Gln.(4.6), (4.10) und (4.24)). Setzt man die obigen Differentialgleichungen für die Greenschen Funktionen auf der linken Seite von (5) ein, dann ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
0 &= \int\int_{\mathcal{V}}\int \Big[\quad G(x,\xi)\; L\; G(x,\eta) \;-\; G(x,\eta)\; L\; G(x,\xi)\Big] d\mathcal{V} \\
&= \int\int_{\mathcal{V}}\int \Big[- \; G(x,\xi)\; \delta(x-\eta) \;+\; G(x,\eta)\; \delta(x-\xi)\Big] d\mathcal{V} \\
&= \qquad - \; G(\eta,\xi) \;+\; G(\xi,\eta). \qquad \Box
\end{aligned}
$$