Kapitel 16

Die charakteristische Singularität der Greenschen Funktion und ihre Auswirkungen

Jede Green'sche Funktin weist für den Grenzübergang

$$R = \sqrt{(x_1 - x_1\prime)^2 + (x_2 - x_2\prime)^2 + \cdots + (x_n - x_n\prime)^2} \;\to\; 0,$$

wenn also der Aufpunkt in den Quellpunkt rückt, eine charakteristische Singularität auf. Deren Charakter hängt nur von der Ordnung der Differentialoperators und von der Dimension des Raumes ab. Er wird nicht beeinflusst von den Termen niedrigerer Ordnung des Differentialoperators und nicht von den Randbedingungen im Enlichen oder Unendlichen. Für einige Differentialoperatoren zweiter Ordnung, für die die Greensche Funktion in geschlossener Form angegeben werden kann, wird dies im nächsten Paragraphen und in Tabelle 16.1 veranschaulicht.

Wenn das Definitionsgebiet der Greenschen Funktion nicht einfach genug ist, kann diese nicht mehr durch geschlossene Ausdrücke dargestellt werden, sondern man hat Integrale oder unendliche Reihen (meist Eigenfunktionsentwicklungen). Die Singularität der Greenschen Funktion bewirkt aber, dass diese Reihen oder Integrale schlecht konditioniert sind. Sie divergieren nicht nur dann, wenn der Aufpunkt mit dem Quellpunkt zusammenfällt. Die Konvergenz der Reihen- oder Integraldarstellungen versagt auch auf Kurven oder Flächen (mathematisch formuliert: auf Mannigfaltigkeiten), die durch den Quellpunkt gehen. Und auch in der Umgebung dieser Mannigfaltigkeiten sind diese Darstellung für numerische Auswertungen wenig brauchbar. Mit der Berechnung der Greenschen Funktion und der quellenmäßigen Darstellung ist man also noch nicht am Ende. Meist kann man aber diese Probleme kurieren, indem man vom Integranden oder von der Reihe entsprechende Korrekturterme abzieht, die das gleiche asymptotische Verhalten wie die störenden Anteile der ursprünglichen Darstellung aufweisen. Diese Korrekturterme müssen so einfach sein, dass sich deren Integrale oder Reihenentwicklungen in einer geschlossenen Form angeben lassen, die die charakteristische Singulartät der Greenschen enthält, während das kurierte Integral oder die kurierte Reihe eine nunmehr brave Funktion darstellen und daher gute Konvergenzeigenschaften besitzen. Dies wird im übernächsten Paragraphen und auch in späteren Kapiteln an einigen Beispielen vorgeführt werden.

16.1 Die Singularität Greenscher Funktionen in geschlossener Form

Diese Singularität der Greenschen Funktion hängt mit der Ergiebigkeit der Einheitsquelle zusammen.

$$-1 = \int\int\int_{|x-x'|\le R} \text{div grad}G \; d^n x = \int\int_{|x-x'|=R} \left(\text{grad}G, \frac{\vec{R}}{R}\right) dF = \int\int_{|x-x'|=R} \frac{\partial G}{\partial R} \underbrace{\left(\text{grad}R, \frac{\vec{R}}{R}\right)}_{1} R^{n-1} \, d\Omega.$$

Die zweite Umformung gilt, da das Oberflächenelement der n-dimensionalen Kugel um die Quelle so aussieht:

$$dF = R^{n-1} \, d\Omega.$$

Damit erhalten wir für die Greensche Funktion in der Nähe der Quelle folgende Bedingung:

$$\frac{\partial G}{\partial R} \sim \frac{1}{R^{n-1}} \Rightarrow \begin{cases} G \sim \frac{1}{R^{n-2}} & \text{für } n > 2, \\ G \sim \ln R & \text{für } n = 2. \end{cases} \tag{16.1}$$

Bei diesen Differentialoperatoren zweiter Ordnung ist die Greensche Funktion im eindimensionalen Fall stetig; sie hat nur einen endlichen Sprung in der 1. Ableitung. Im zweidimensionalen Fall hat sie eine logarithmische Singularität. Bei der Dimensionen $n \geq 3$ hat sie einen Pol der Ordnung $n-2$. Bei Differentialoperatoren höherer Ordnung ist diese Singulatität noch stärker.

Tab. 16.1 Green'sche Funktionen verschiedener Differentialoperatoren 2. Ordnung

Dimension des Raumes	1	2	3	n	
Diff'operator 2. Ordnung	G stetig, $\frac{\partial G}{\partial x}$ Sprung	$-\ln R$	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R^{n-2}}$	$n \geq 3$
$\triangle$	$G = x_>$	$-\frac{1}{2\pi} \ln R$	$\frac{1}{4\pi R}$	$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{(n-1)!}{2R^{n-2}}$	$n \geq 2$
$(\triangle + k^2)e^{-iwt}$	$\frac{ie^{ik\|x-x\prime\|}}{2k}$	$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR)$	$\frac{e^{ikR}}{4\pi R}$	$\frac{i}{4}\left(\frac{k}{2\pi R}\right)^{\frac{n}{2}-1} H^{(1)}_{\frac{n}{2}-1}(kR)$	$n \geq 2$
$\triangle - \kappa^2$	$\frac{e^{-\kappa\|x-x\prime\|}}{2\kappa}$	$\frac{1}{2\pi} K_0(\kappa R)$	$\frac{e^{-\kappa R}}{4\pi R}$	$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\kappa}{2\pi R}\right)^{\frac{n}{2}-1} K_{\frac{n}{2}-1}(\kappa R)$	$n \geq 2$

16.2 Auswirkung der Singularität auf die Konvergenz der Reihendarstellung

Die Sinularität hat einen bestimmenden Einfluss auf das Konvergenzverhalten von Reihen- oder Integraldarstellungen der Greenschen Funktion, die ja aus Überlagerungen partikulärer Integrale des zugehörigen Differentialoperators bestehen. Diese Darstellungen bestehen aus Ausdrücken, die überall im Definitionsgebeit, also auch an der singulären Stelle der Greenschen Funktion endlich sind. Die Darstellung kann also das singuläre Verhalten nur insofern wiedergeben, als sie divergiert. Dies hat aber zur Folge, dass diese Darstellung auf einer Kurve oder Fläche, die durch den singulären Punkt geht, und nicht nur an diesem Punkt selbst, schlecht oder gar nicht konverigiert. Dieser Sachverhalt und Massnachmen zur Verbesserung werden in diesem Paragraphen und in nachfolgenden Kapiteln behandelt werden.

In diesem Kapitel werden nur zweidimensionale Probleme untersucht. Bei diesen ist die charakteristische Singularität der Greenschen Funktion logarithmisch, also wie $\ln R$, wobei R der Abstand zwischen Quell- und Aufpunkt ist.

16.2.1 Das Verhalten der Greenschen Funktion der zweidimensionalen Diffustions- und Potentialgleichung

Die Diffustionsgleichung

Die Greensche Funktion der Diffustionsgleichung

$$\Delta G \ - \ \kappa^2 \ G \ = \ - \ \delta^2(x - x') \tag{16.2}$$

wurde in Gl.(14.15) in geschlossener Form ausgedrückt:

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi; \rho', \phi') &= \frac{1}{2\pi} \ K_0(\kappa R) && (16.3) \\ &\approx -\frac{1}{2\pi} \ \ln(\kappa R) \qquad \text{für} \quad \kappa R \gg 1; && (16.4) \\ R &= \sqrt{(x - x')^2 \ + (y - y')^2} \ = \ \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \ \cos(\phi - \phi') + \rho'^2}. && (16.5) \end{aligned}$$

in Gl.(14.17) als unendliche Reihe. Diese wurde hier mit $I_{-m}() = (-)^m \ I_m(), \ K_{-m}() = (-)^m \ K_m()$, umgeschrieben:

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi; \rho', \phi') \ &= \tfrac{1}{2\pi} \ \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + \delta_{m,0}\right) \ \cos(\phi - \phi') \quad I_m(\kappa\rho_<) \qquad K_m(\kappa\rho_>) && (16.6) \\ &\text{für } \kappa\rho_< \approx \kappa\rho_> \gg 1 \qquad\qquad e^{\kappa\rho_<} \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa\rho_<}} \ e^{-\kappa\rho_>} \frac{\pi}{\sqrt{2\kappa\rho_<}} && (16.7) \\ &\text{für } \rho_< = \rho_> \ = \rho \gg 1 \qquad\qquad \frac{1}{2} \ \frac{1}{\kappa\rho} && (16.8) \end{aligned}$$

Dadurch, dass sich die Exponentialfunktionen wegheben, ist auf dem Kreis $\rho = \rho'$ nur mehr bedingt; sie hängt entscheidend von den Oszillationen des Kosinus ab. Auch in einem Ringbereich um diesen Kreis ist die Konvergenz noch sehr langsam.

Die Potentialgleichung

Die Greensche Funktion der Potentialgleichung

$$\Delta G \ = \ - \ \delta^2(x - x') \tag{16.9}$$

wurde in Gl.(14.19) in geschlossener Form, in Gl.(13.66) als unendliche Reihe ausgedrückt:

$$\begin{aligned} G(\rho, \phi; \rho', \phi') \ &= \ -\frac{1}{2\pi} \ \ln R, \\ &= \ -\frac{1}{2\pi} \ \ln \rho_> \ + \ \frac{1}{2\pi} \ \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + \delta_{m,0}\right) \ \cos[m(\phi - \phi')] \ \frac{1}{m} \left(\frac{\rho_<}{\rho_>}\right)^m \\ \rho_< = \rho_> = \rho : \ &= \ -\frac{1}{2\pi} \ \ln \rho \ + \ \frac{1}{2\pi} \ \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 + \delta_{m,0}\right) \ \cos[m(\phi - \phi')] \ \ \frac{1}{m} 1^m. \end{aligned}$$

Die Reihe ist bedingt, also schlecht konvergent. Noch schlimmer ist es, wenn man versucht, das Feld einer Linienladung daraus zu berechnen. Die Ladung e ist in $(\rho', \ \phi' = 0)$; der Aufpunkt in $(\rho > \rho', \ \phi)$.

$$2\pi \ \varepsilon_0 \ \Phi(\rho, \phi) \ = \ 2\pi \ e \ G(\rho, \phi; \rho', 0) \ = \ -\ln \rho \ + \ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m} \ \cos(m\phi) \ \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^m$$

Daraus folgt dann für die radiale Feldstärke:

$$\begin{aligned}
\rho \geq \rho' : \quad 2\pi\ \varepsilon_0\ E_\rho \ &= \ -\ 2\pi\ \varepsilon_0 \tfrac{\partial \Phi}{\partial \rho} \quad = \frac{1}{\rho}\ +\ \frac{1}{\rho'}\ \sum_{m=0}^{\infty}\ \cos(m\phi)\ \left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{m+1} \\
\rho = \rho' : \quad & \quad = \frac{1}{\rho}\ +\ \frac{1}{\rho'}\ \sum_{m=0}^{\infty}\ \cos(m\phi)\ \ (1)^{m+1}
\end{aligned}$$

Die hier gezeigten Beispiele zeigen das typische Verhalten von Reihendarstellungen der zweidimensionalen Greenschen Funktion wie es aus deren Singularität resultiert. Die mangelnde Konvergenz ist hier kein Problem, weil man ja so die geschlossenen Ausdrücke verwenden kann. Die Reihenentwicklungen sind aber nützlich, um in anderen Fällen, wo es nur Reihendarstellugnen der Greenschen Funktion gibt, die Singularität zu isolieren.