

Kapitel 21

Die Greensche Funktion der Wellengleichung in freiem Raum

Eine Lösung $u(\vec{r}, t)$ der inhomogenen Wellengleichung

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) u(\vec{r}, t) = -F(\vec{r}, t). \quad (21.1)$$

mit gegebener Quellverteilung $F(\vec{r}, t)$ muss dieser hyperbolischen Differentialgleichung genügen, den Anfangsbedingungen:

$$u(\vec{r}, 0) = f_0(\vec{r}), \quad (21.2)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} u(\vec{r}, t) \right|_{t=0} = g_0(\vec{r}), \quad (21.3)$$

mit gegebenen Anfangsverteilungen $f_0(\vec{r})$ und $g_0(\vec{r})$ sowie der Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen.

21.1 Definition der Greenschen Funktion im freien Raum

Im dreidimensionalen Raum muss die Greensche Funktion der folgenden Gleichung genügen:

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'). \quad (21.4)$$

Ausserdem hat diese Greensche Funktion folgenden Eigenschaften:

1. Sie ist kausal, es gibt keine Wirkung vor der auslösenden Ursache:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= 0, & \text{für } t < t' \\ \frac{\partial}{\partial t} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= 0. \end{aligned} \quad (21.5)$$

2. Sie genügt der Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen.
3. Sie erfüllt folgende Reziprozitätsrelation:

$$G_+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = G(\vec{r}', -t'; \vec{r}, -t) = G_-(\vec{r}', -t'; \vec{r}, -t). \quad (21.6)$$

Der Beweis dieser Reziprozitätsrelation erfolgt in der selben Weise wie in §18.1:

$$\begin{aligned} \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G_+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'); \\ \left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G_-(\vec{r}, -t; \vec{r}'', -t'') &= -\delta(\vec{r} - \vec{r}'') \delta(t - t''). \end{aligned} \quad (21.7)$$

Damit gehen wir in den Greenschen Satz:

$$\int \int \int dV (G_+ \Delta G_- - G_- \Delta G_+) = \int \int dF \left(G_+ \frac{\partial G_-}{\partial n} - G_- \frac{\partial G_+}{\partial n} \right) = 0;$$

das Oberflächenintegral ist Null wegen der Ausstrahlungsbedingung für u und G . Damit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} 0 &= \int \int \int dV \left[-G_+ \delta(\vec{r} - \vec{r}'') \delta(t - t'') + G_- \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \right] + \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \int \int \int dV \left[G_+ \frac{\partial^2 G_-}{\partial t^2} - G_- \frac{\partial^2 G_+}{\partial t^2} \right]. \\ 0 &= -G_+(\vec{r}'', t; \vec{r}', t') \delta(t - t'') + G_-(\vec{r}', -t; \vec{r}'', -t'') \delta(t - t') + \\ &\quad + \frac{1}{c^2} \int \int \int dV \frac{\partial}{\partial t} \left[G_+ \frac{\partial G_-}{\partial t} - G_- \frac{\partial G_+}{\partial t} \right]. \end{aligned}$$

This is integrated over time from $-\infty$ to $t > \max(t', t'')$:

$$G_+(\vec{r}'', t''; \vec{r}', t') - G_-(\vec{r}', -t'; \vec{r}'', -t'') = \frac{1}{c^2} \int \int \int dV \left[G_+ \frac{\partial G_-}{\partial t} - G_- \frac{\partial G_+}{\partial t} \right]_{t=-\infty}^{t=t'} = 0.$$

Der Integrand auf der rechten Seite ist Null, weil gemäß Gl.(22.6)

$$G_+(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = 0 \quad \text{für } t < t',$$

als auch

$$G_-(\vec{r}, -t; \vec{r}'', -t'') = 0 \quad \text{für } t = t' > \max(t', t''), \quad \text{woraus folgt } t > t'' \Rightarrow -t < -t''.$$

21.2 Quellenmäßige Darstellung der Lösung

Die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) u(\vec{r}', t') &= -F(\vec{r}', t') \\ \left(\Delta' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2} \right) G(\vec{r}', -t'; \vec{r}, -t) &= -\delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t'). \end{aligned}$$

werden in den Greenschen Satz

$$\int \int \int dV' \left[G \Delta' u - u \Delta' G \right] = \int \int dF' \left[G \frac{\partial u}{\partial n'} - u \frac{\partial G}{\partial n'} \right]$$

eingesetzt. Das Oberflächenintegral erstreckt sich über die unendlich ferne Kugel und ist Null, weil u und G dort die Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Somit ergibt sich:

$$0 = \int \int \int dV' \left[G \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} - F(\vec{r}', t') \right) - u \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t'^2} - \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \right) \right]$$

Dieses Resultat wird über die Ortsvariablen integriert. Die Integrale über die entsprechenden Deltadistributionen werden ausgeführt.

$$u(\vec{r}, t) \delta(t - t') = \int \int \int dV' \left[G F(\vec{r}', t') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t'} \left(u \frac{\partial G}{\partial t'} - G \frac{\partial u}{\partial t'} \right) \right]$$

Dieses Resultat wird über die Zeit integriert:

$$u(\vec{r}, t) = \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int \int \int dV' \left[G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') F(\vec{r}', t') + \frac{1}{c^2} \left(u \frac{\partial G}{\partial t'} - G \frac{\partial u}{\partial t'} \right)_{t'=0}^{t'=t+\varepsilon} \right]$$

$G = 0$ und $\partial G / \partial t' = 0$ für $t' = t + \varepsilon > t$. Damit folgt die gesuchte quellenmäßige Darstellung der Lösung:

$$u(\vec{r}, t) = \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int \int \int dV' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') F(\vec{r}', t') + \frac{1}{c^2} \int \int \int dV' \left[\frac{\partial u}{\partial t'} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') - u \frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')}{\partial t'} \right]_{t'=0}$$

In der zweiten Zeile werden die Anfangswerte $u(\vec{r}', t' = 0) = f_0(\vec{r}')$ und $\frac{\partial u(\vec{r}', t')}{\partial t'} \Big|_{t'=0} = g_0(\vec{r}')$ eingesetzt. Dies gibt die endgültige Form der quellenmäßigen Darstellung der Lösung der Wellengleichung:

$$u(\vec{r}, t) = \int_0^{t+\varepsilon} dt' \int \int \int dV' G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') F(\vec{r}', t') + \frac{1}{c^2} \int \int \int dV' \left[g_0(\vec{r}') G(\vec{r}, t; \vec{r}', t' = 0) - f_0(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')}{\partial t'} \Big|_{t'=0} \right]. \quad (21.8)$$

Der erste Term beschreibt die Ausbreitung der Wellen, die von den Quellen erzeugt werden; der zweite die Ausbreitung der Anfangsverteilung von u ; der dritte die der Anfangsverteilung der Zeitableitung von u .

21.3 Berechnung der Greensche Funktion der Wellengleichung im freien Raum

21.3.1 Dreidimensionaler Fall

In die Gleichung für die Greensche Funktion (22.4):

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = - \delta(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t') \quad (21.9)$$

werden die Fourierintegraldarstellung der Deltadistribution

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}$$

und ein entsprechender Ansatz für die Greensche Funktion eingesetzt:

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} g(\omega; \vec{r}, \vec{r}')$$

eingesetzt. Dies gibt folgende Differentialgleichung für die Amplitudenfunktion $g(\omega; \vec{r}, \vec{r}')$:

$$(\Delta + k^2)g(\vec{r}, \vec{r}') = - \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \text{mit} \quad k = |\omega|/c.$$

Deren Greensche Funktion wurde in Kap.15 berechnet:

$$g(\omega; \vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi R} e^{ikR} \quad \text{mit } R = |\vec{r} - \vec{r}'|.$$

Damit ergeben sich folgende Darstellungen der Greenschen Funktion :

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') &= \frac{1}{8\pi^2 R} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{ikR} e^{-i\omega(t-t')} = \\ &= \frac{1}{8\pi^2 R} \int_0^{\infty} d\omega e^{ikR} e^{-i\omega(t-t')} + \frac{1}{8\pi^2 R} \int_0^{\infty} d\omega e^{ikR} e^{i\omega(t-t')} = \\ &= \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\frac{R}{c} - (t-t')\right). \end{aligned} \quad (21.10)$$

Beim Übergang von der ersten zur zweiten Zeile wurde absolute Betrag von ω in k berücksichtigt. Das erste Integral kann mit etwas Nachsicht als eine Darstellung der Deltadistribution betrachtet werden; dies ist beim Übergang zur letzten Zeile benutzt worden. Mit dem gleichen Gesichtspunkt ergibt sich, dass das zweite Integral der zweiten Zeile den Wert Null hat. Bei Ausschluss des singulären Punktes $\vec{r} = \vec{r}'$ ist immer $R > 0$. Damit ergibt sich aus Gl.(22.10):

$$G(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{\theta(t-t')}{4\pi R} \delta\left(\frac{R}{c} - (t-t')\right). \quad (21.11)$$

Diese Greensche Funktion beschreibt eine kugelförmige Wellenfront, die vom Quellpunkt ausgeht und sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Auf dieser Wellenfront hat die Greensche Funktion den Wert ∞ , s. Fig.22.1, links. Hinter dieser Wellenfront hat die Greensche Funktion wieder den Wert Null. Ein Beobachter befinde sich im Abstand a vom Quellpunkt. Wenn die Quelle zur Zeit $t=t'$ einen unendlich kurzen unendlich hohen Impuls aussendet, dann registriert der Beobachter im Augenblick $t - t' = a/c$ einen unendlich kurzen Puls, vorher und nachher nichts, s. Fig.22.1, rechts.

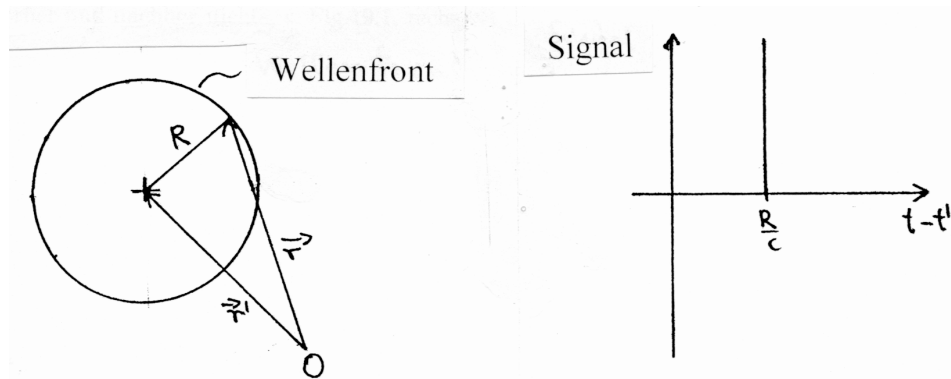


Abbildung 21.1: Das Verhalten der Greenschen Funktion der Wellengleichung in drei Raumdimensionen. Links: Kugelförmige Wellenfront. Rechts: Signal an einem Punkt im Abstand a von der Quelle.

21.3.2 Zweidimensionaler Fall

Im zweidimensionalen Raum werden am besten Polarkoordinaten ρ, ϕ benutzt. In die Gleichung für die Greensche Funktion:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{G}(x, y, t; x', y', t') = -\delta(x - x') \delta(y - y') \delta(t - t'), \quad (21.12)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\rho, \phi, t; \rho', \phi', t') = -\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \delta(t - t').$$

werden die Fourierintegraldarstellung der Deltadistribution und ein entsprechender Ansatz für die Greensche Funktion eingesetzt:

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}, \quad G(\rho, \phi, t; \rho', \phi', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} g(\rho, \phi; \rho', \phi')$$

eingesetzt. Dies gibt folgende Differentialgleichung für die Amplitudenfunktion $g(\rho, \phi; \rho', \phi')$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial P^2} + \frac{1}{P} \frac{\partial}{\partial P} + k^2 \right) g(\rho, \phi; \rho', \phi') = -\frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\phi - \phi') \quad \text{mit } k = |\omega|/c$$

und

$$P = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + \rho'^2},$$

Deren Greensche Funktion wurde in Kap.15 berechnet:

$$g(\rho, \phi; \rho', \phi') = \frac{i}{4} H_0^{(1)}\left(\frac{\sqrt{\omega^2} P}{c}\right)$$

Damit ergeben sich folgende Darstellungen der Greenschen Funktion der Wellengleichung mit zwei Raumdimensionen:

$$G(\rho, \phi, t; \rho', \phi', t') = \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega H_0^{(1)}\left(\frac{\sqrt{\omega^2} P}{c}\right) e^{-i\omega(t-t')} = \quad (21.13)$$

$$= \frac{c}{2\pi} \frac{\theta((t-t') - P/c)}{\sqrt{c^2(t-t')^2 - P^2}} \quad (21.14)$$

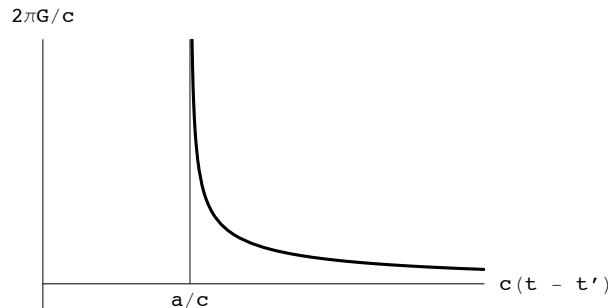


Abbildung 21.2: Zeitliches Verhalten der Greenschen Funktion der Wellengleichung in zwei Raumdimensionen. Der Beobachter hat Abstand a vom Quellpunkt.

Das obige Integral gibt den in der zweiten Zeile aufgeführten geschlossenen Ausdruck. Die Auswertung des Integrals folgt unten. Diese Lösung liefert auch eine Wellenfront; diese liegt auf

einem Kreis um den Quellpunkt, der sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet; auf dieser hat die Greensche Funktion den Wert Unendlich. Dahinter ist das Signal endlich und es geht allmählich gegen Null. Dieses Verhalten kann man verstehen, wenn man sich vorstellt, dass die Greensche Funktion eine unendlich lange Quelle mit der homogenen Dichte 1 darstellt, die sich senkrecht zur ρ, ϕ -Ebene erstreckt. Alle Punkte derselben senden zum gleichen Zeitpunkt $t = t'$ einen Puls aus. Hat der Beobachter den Normalabstand a von dieser Linienquelle dann trifft die Wellenfront zur Zeit $t - t' = a/c$ ein; er registriert ein unendliches Signal, das vom nächstgelegenen Punkt der Linienquelle emittiert worden ist. Danach treffen weitere Signale ein, die auf den beiden Seiten des nächstgelegenen Punktes emittiert worden sind, s.Fig.22.2.

Die Auswertung der Integrals der Greenschen Funktion

Der Integrand der Greenschen Funktion in Gl.(22.13) ist eine mehrdeutige Funktion von ω , denn die Hankelfunktion hat für Argument Null einen logarithmischen Verzweigungspunkt. Der Verzweigungsschnitt liegt längs des negativen Strahls der reellen ω -Achse. Der Integrationsweg läuft auf der reellen Achse, aber oberhalb des Verzweigungsschnitts; damit enthält er auch einen Halbkreis um den Ursprung, s. Abb.22.3.

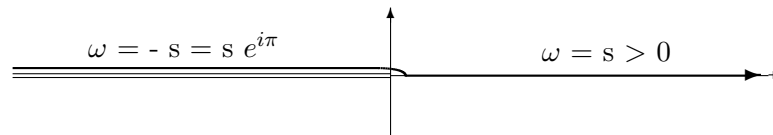


Abbildung 21.3: Der Verzweigungsschnitt und die Werteverteilung in der komplexen ω -Ebene.

Die Variable ω wird auf den drei Teilen des Integrationsweges folgendermaßen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \omega > 0 : \quad & \omega = s, & d\omega = ds, & \quad 0 < \epsilon \leq s \leq \infty; \\ \omega < 0 : \quad & \omega = s e^{i\pi}, & d\omega = -ds, & \quad 0 < \epsilon \leq s \leq \infty; \\ \text{Halbkreis} \quad & \omega = \epsilon e^{i\phi}, & d\omega = i \epsilon e^{i\phi} d\phi, & \quad \pi \geq \phi \geq 0. \end{aligned}$$

Die Halbsummlaufrelationen (25.46) ermöglichen es, die analytische Fortsetzung der Hankelfunktion auf negative Werte des Arguments zu berechnen. Mit obiger Zerlegung wird das Integral der Greenschen Funktion in Gl.(22.13):

$$\begin{aligned} G = & \frac{i}{8\pi} \int_{-\infty}^0 ds e^{i\pi} \underbrace{H_0^{(1)}\left(\frac{s}{c} e^{i\pi} P\right)}_{-H_0^{(2)}(Ps/c)} e^{-is(t-t')} + \frac{i}{8\pi} \int_0^{\infty} ds H_0^{(1)}\left(\frac{s}{c} P\right) e^{-is(t-t')} + \\ & + \frac{i}{8\pi} \int_{\pi}^0 i\epsilon d\phi H_0^{(1)}\left(\frac{\epsilon e^{i\phi}}{c} P\right) e^{-i\epsilon e^{i\phi}(t-t')} \quad \left(\sim \epsilon \ln \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \right). \end{aligned}$$

Das Integral über den Halbkreis liefert in der Grenze $\epsilon \rightarrow 0$ keinen Beitrag. Für die Hankelfunktion erster Art mit negativem Argument wurde gemäß der Halbsummlaufrelation (25.46) die Hankelfunktion zweiter Art mit positivem Argument eingesetzt. Mit den Abkürzungen

$$a := P/c, \quad b := t - t'$$

gibt das:

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{i}{8\pi} \int_0^\infty ds \left[H_0^{(1)}(s a) e^{-isb} - H_0^{(2)}(s a) e^{isb} \right] \\
 &\quad [(J_0 + iY_0)(\cos - i \sin) - (J_0 - iY_0)(\cos + i \sin)] \\
 G &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty ds \left[Y_0(s a) \cos(s b) - J_0(s a) \sin(s b) \right] = \\
 &= 0 \quad \text{für } 0 < b < a \Rightarrow c(t - t') < P; \\
 &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{c}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{c^2(t - t')^2 - P^2}} \quad \text{für } 0 < a < b \Rightarrow c(t - t') > P.
 \end{aligned}$$

Für die Auswertung der obigen Integrale wurden folgende Formeln (s. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Alan Jeffrey, Daniel Zwillinger: Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press; 6 ed. 2000. sects. 6.67, 6.68) herangezogen:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty dx Y_0(a x) \cos(b x) &= 0 && 0 < b < a, \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} && 0 < a < b; \\
 \int_0^\infty dx J_0(a x) \sin(b x) &= 0 && 0 < b < a, \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} && 0 < a < b.
 \end{aligned}$$

21.3.3 Eindimensionaler Fall

In die Gleichung für die Greensche Funktion:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(x, t; x', t') = -\delta(x - x') \delta(t - t'),$$

werden die Fourierintegraldarstellung der Deltadistribution und ein entsprechender Ansatz für die Greensche Funktion eingesetzt:

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')}, \quad G(x, t; x', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty d\omega e^{-i\omega(t-t')} g(\omega; x, x')$$

eingesetzt. Dies gibt folgende Differentialgleichung für die Amplitudenfunktion $g(\omega; x, x')$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{(\omega + i\epsilon)^2}{c^2} \right) g(\omega; x, x') = -\delta(x - x').$$

Um Schwierigkeiten bei der Integration zu vermeiden, wurde zur Variablen ω ein kleiner, positiver, konstanter Wert hinzugefügt; dies ist auch eine Methode um die Kausalität zu gewährleisten. Am Schluss läßt man ϵ gegen Null gehen, ähnlich wie bei der Methode der verschwindenden Verluste. Die Greensche Funktion wurde in Kap.15 berechnet; wir setzen hier $k = \omega + i\epsilon$.

$$g(\omega; x, x') = \frac{i}{2k} e^{ik|x-x'|} = \frac{ic}{2(\omega + i\epsilon)} e^{i(\omega+i\epsilon)|x-x'|/c}.$$

Damit ergeben sich folgende Darstellungen der Greenschen Funktion der Wellengleichung mit einer Raumdimension:

$$G(x, t; x', t') = \frac{ic}{4\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^\infty d\omega \frac{2}{(\omega + i\epsilon)} e^{i(\omega+i\epsilon)|x-x'|/c} e^{-i\omega(t-t')} \quad (21.15)$$

$$= \frac{c}{2} \Theta\left((t - t') - \frac{|x - x'|}{c}\right) \quad (21.16)$$

$\Theta()$ ist die Heavisidesche Sprungfunktion. Die Greensche Funktion beschreibt folgenden Vorgang: Das Signal breitet sich von der Quellen nach beiden Richtungen mit der Geschwindigkeit c gleich aus. Sobald die Wellenfront bei einem Beobachter angekommen ist, registriert er ein konstantes Signal.

Die Auswertung des Integrals

Das Integral wird mittels des Cauchyschen Residuensatzes ausgewertet. Dabei wird der Integrationsweg, der längs der reellen Achse verläuft, mit einem Halbkreis C_U bzw. C_L in der oberen bzw. unteren Halbebene geschlossen, je nach dem Vorzeichen des Exponenten $|x - x'| - c(t - t')$. Der einzige Pol des Integranden liegt auf der negativen imaginären Halbachse. Daher ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{2}{(\omega + i\epsilon)} e^{i(\omega+i\epsilon)|x-x'|/c} e^{-i\omega(t-t')} &= 0 \text{ für } |x - x'| - c(t - t') > 0, \quad C_U; \\ &= \frac{c}{2} \text{ für } |x - x'| - c(t - t') < 0, \quad C_L, \\ &= -2\pi i \frac{ic}{4\pi} \text{Res}\left(\frac{1}{(\omega + i\epsilon)} e^{i\omega[|x-x'|/c-(t-t')]}, \omega = -i\epsilon\right) \\ &= \frac{c}{2} e^{-\epsilon} = \frac{c}{2} \text{ für } \epsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Eine zweite Methode zur Berechnung der Greenschen Funktion

Wir gehen von der Greenschen Funktion $G(\vec{r}, t; \vec{r}', t')$, Gl.(22.10), für drei Raumdimensionen aus:

$$G^{(3)}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = \frac{1}{4\pi R} \delta\left(\frac{R}{c} - (t - t')\right), \quad R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

und integrieren über zwei Raumdimensionen ab. Der Aufpunkt ist $\vec{r} = (0, 0, z)$. Der Quellpunkt wird in ebenen Polarkoordinaten ausgedrückt:

$$\text{vecr}' = (x', y', z') = (\rho' \cos \phi', \rho' \sin \phi', z')$$

und führen folgende Abkürzungen ein:

$$\zeta := z - z', \quad \tau := t - t', \quad u := \rho'^2, \quad du = 2 \rho' d\rho'; \quad R = \sqrt{\rho'^2 + \zeta^2} = \sqrt{u + \zeta^2}.$$

Integration über ρ und ϕ gibt:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(z, t; z', t') &= \int_0^{\infty} \rho' d\rho' \int_0^{2\pi} d\phi G^{(3)} = \\ &= \frac{2\pi}{4\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} du \frac{1}{\sqrt{u + \zeta^2}} \delta\left(\frac{\sqrt{u + \zeta^2}}{c} - \tau\right) = c/2. \end{aligned}$$

Hiebei muss man eine spezielle Formel für die Auswertung der Deltadistribution verwenden, weil die Integrationsvariable nicht direkt sondern in einer Funktion im Argument auftritt. Diese lautet allgemein:

$$\int g(u) \delta[f(u) - \tau] du = \left[\frac{g(u)}{df/du} \right]_{f(u)=\tau}$$

Hier ist

$$g(u) = \frac{1}{\sqrt{u + \zeta^2}} = \frac{1}{cf(u)}, \quad \left[\frac{g(u)}{df/du} \right]_{f(u)=\tau} = \frac{1}{\sqrt{u + \zeta^2}} 2c \sqrt{u + \zeta^2} = 2c.$$