Kapitel 3

Allgemeine Formulierung des linearen Randwertproblems.

Es sei in **linearer Differentialoperator** L gegeben. Mit dessen Hilfe wird eine Differentialgleichung

$$L\ \varphi(x)\ =\ -f(x) \tag{3.1}$$

definiert, wobei f eine vorgegebene Funktion ist. x representiert eine oder mehrere unabhängige Variablen. Für die Lösungen sind lineare Randbedingungen

$$a\ \varphi(x)\ +\ b\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\ =\ g(x) \tag{3.2}$$

längs Randflächen, -kurven oder -punkten vorgeschrieben. $g(x)$ ist ebenfalls eine gegebene Funktion. Die Dimension der Randflächen $\mathcal{F}$ ist immer um Eins niedriger als die des Raumes der x . a und b sind gegebene Koeffizienten. Sie können auch von der Koordinaten des Randes abhängen. In den meisten Fällen ist nur einer von diesen von Null verschieden. Mindestens einer von ihnen muß von Null verschieden sein.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\ =\ (\vec{n}\cdot\nabla\varphi) \tag{3.3}$$

heißt die Normalableitung, n ist die Normale der Randfläche(n) $\mathcal{F}$; ∇ der Gradient im Raum der x . In der Gleichung für die Randbedingung kommt keine Tangentialableitung von φ vor, weil diese in den Term $a\varphi(x)$ aufgenommen werden kann.

Die obige Differentialgleichung zusammen mit der (den) Randbedingung(en) definiert das lineare Randwertproblem . Sind $f(x)$ und $g(x)$ beide identisch Null, spricht man von einem **homogenen Randwertproblem**. Ist mindestens eine dieser beiden Funktionen nicht identisch Null, heißt das **Problem inhomogen** .

Wir müssen uns auf lineare Probleme beschränken, weil nur für diese gilt das Superpositionsprinzip, das besagt, daß jede Linearkombination zweier Lösungen wieder eine Lösung ist. Dies ist eine notwendige Voraussetzung für die Anwendbarkeit der Methode der Greenschen Funktion.

In diesem Kapitel ist bis jetzt nur von Randwertproblemen gesprochen worden, in denen die Zeit nicht vorkommt (Differentialoperatoren elliptischen Typs). Hängt das Problem von der Zeit ab, unterscheiden wir zwei Vorgangsweisen: Entweder wir fordern eine harmonische (eventuell auch exponentielle) Zeitabhängigkeit, dann erhält man ein zeitfreies Problem wie zuvor.

Sonst aber (bei "transienten Problemen") müssen neben der Differntialgleichung und den Randbedingungen auch noch Anfangsbedingungen angegeben werden:

$$\varphi(t=0,x)\ =\ \chi_0(x),\ \ \varphi'(t=0,x)\ =\ \chi_1(x),\ \ ....,\ \ \varphi^{(s)}(t=0,x)\ =\ \chi_s(x). \tag{3.4}$$

Darin is s um Eins kleiner als die höchste in L auftretende Zeitableitung. Solche Probleme heißen **gemischte Randwertprobleme** . Bei den üblichen Randwertproblemen der Physik sind die zugehörigen Differentialoperatoren vom parabolischen oder hyperbolischen Typ.