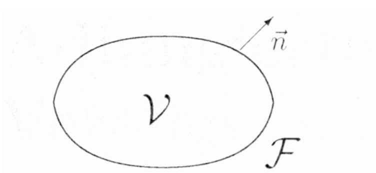
Kapitel 4

Adjungierter Differentialoperator. Verallgemeinter Greenscher Satz

Bei Randwertproblemen muss das Feld (oder allgemeiner die Funktionen, die den physikalischen Vorgang beschreiben) im Inneren des Bereiches in Beziehung gebracht werden mit den Werten auf dem Rand dieses Bereiches. Dazu dienen Integralsätze, wie z.B. der Gaußsche Satz der Vektorrechnung und Verallgemeinerung, die daraus abgeleitet werden können. Wir nehmen dabei an, dass die in den Integranden vorkommenden Funktionen im ganzen Bereich genügend oft differenzierbar sind. Leider ist diese Voraussetzung bei den später tatsächlich benützten Greenschen Funktionen nicht erfüllt. Trotzdem werden die damit erhaltenen Resultat richtig sein.

Im Gauschen Satz



$$\iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{a}\; d\mathcal{V} \;=\; \iint_{\mathcal{F}} (\vec{a}\cdot\vec{n})\; d\mathcal{F} \tag{4.1}$$

Abbildung 4.1: Das Volumen $\mathcal{V}$ wird von der Fläche $\mathcal{F}$ eingeschlossen.
$\vec{n}$ ist die nach aussen gerichtete Flächennormale.

bezeichnet $\mathcal{F}$ die Fläche, die das Volumen $\mathcal{V}$ einschliet; $\vec{n}$ ist die auswärts gerichtete Normale (s.Abb.4.1). $\vec{a}$ ist ein vorgegebenes Vektorfeld. Der Graußsche Satz wurde hier für den 3-dimensionalen Raum angeschrieben. Er gilt auch im 2-dimensionalen (dann kommt statt $d\mathcal{V}$ das Flächenelement $d\mathcal{F}$ und rechts statt $d\mathcal{F}$ das Linienelement ds) oder auch in einem n-dimensionalen Raum. Das gleiche gilt für den 1. und 2. Greenschen Satz, die aus (4.1) abgeleitet werden. Setzt man man $\vec{a} = v$ grad$u$, dann erhält man den **1. Greenschen Satz:**

$$\iiint_{\mathcal{V}} (\nabla u\cdot\nabla v \;+\; v\;\Delta u)\; d\mathcal{V} \;=\; \iint_{\mathcal{F}} v\,\frac{\partial u}{\partial n}\, d\mathcal{F}.$$

Vertauscht man dann u mit v und zieht den resultierenden Ausdruck vom ersten ab, bekommt man den **2. Greenschen Satz:**

$$\iiint_{\mathcal{V}} (u\;\Delta v \;-\; v\;\Delta u)\; d\mathcal{V} \;=\; \iint_{\mathcal{F}} \left(u\,\frac{\partial v}{\partial n} \;-\; v\,\frac{\partial u}{\partial n}\right)\, d\mathcal{F}. \tag{4.2}$$

Dieser Satz wird in den nachfolgenden Paragraphen verwendet werden, um die Lösung von Randwertproblemen der Helmholtz- und Potentialgleichung mittels der zugehörigen Greenschen Funktion darzustellen. Ganz allgemein läßt sich für jeden linearen Differentialoperator L eine zu Gl.(4.2) analoge Formel ableiten, die (verallgemeinerter) Greenscher Satz genannt werden wird.

4.1 Greenscher Satz für eine Variable

Der skalare Differentialoperator

$$Lu \;=\; a\,u'' \;+\; b\,u' \;+\; c\,u \tag{4.3}$$

wirkt auf die skalare Funktion u(x) der einen Variablen x; von dieser hängen auch a(x), b(x), c(x) ab. Striche bezeichnen die Ableitung d/dx. Lu wird von links mit der Funktion v(x) multipliziert, anschließend werden die Ableitungen herausgezogen, bis entweder ein d/dx vor dem ganzen Ausdruck steht oder u nicht mehr differenziert wird.

$$\begin{aligned}
v\;L\;u \quad &= \quad v\;a\;u'' \;+\; v\;b\;u' \;+\; v\;c\;u. \\
v\;b\;u' \quad &= \quad \frac{d}{dx}(vbu) \;-\; u\,\frac{d}{dx}\,(bv) \;=\; (vbu)' \;-\; u\;(bv)'. \\
v\;a\;u'' \quad &= \quad \frac{d}{dx}(vau') \;-\; u'\,\frac{d}{dx}\,(va) \\
&= \quad \frac{d}{dx}(vau') \;-\; \frac{d}{dx}\,\big(u\;(av)'\big) \;+\; u\,\frac{d^2}{dx^2}(av).
\end{aligned}$$

Die einzelnen Zeilen werden nun so umgeschrieben, dass die Ausdrücke, vor denen d/dx steht, auf der rechten Seite übrigbleiben:

$$\begin{array}{rcl}
v\;a\;u'' \;-\; u\;(av)'' & = & \dfrac{d}{dx}[vau' \;-\; u(av)'], \\
(vbu)' \;-\; u\;(bv)' & = & \dfrac{d}{dx}(vbu), \\
vcu \;-\; ucv & = & 0. \\
\hline
v\;Lu \;-\; u\;L^*v & = & \dfrac{d}{dx}\;j
\end{array} \tag{4.4}$$

mit

$$\begin{aligned}
L^*v \quad &= \quad (av)'' \;-\; (bv)' \;+\; cv \\
&= \quad av'' \;+ (2a' \;-\; b)\;v' \;+\; (a'' \;-\; b' \;+\; c)\;v
\end{aligned} \tag{4.5}$$

und

$$j \;=\; vau' \;-\; u\;(av)' \;+\; buv. \tag{4.6}$$

Addition der ersten drei Zeilen gibt Gl.(4); dabei wird die zweite Kolonne der linken Seite in der Definition des Operators L^*, Gl. (5), zusammengefasst. Ebenso resultiert aus der rechten Seite die Definition des "Stromes" j von Gl.(6). Integration der Gl.(4) gibt den verallgemeinerten Greenschen Satz:

$$\int_{x_0}^{x_1}(v\;Lu \;-\; u\;L^*v)\;dx \;=\; \Big[vau' \;-\; u(av)' \;+\; ubv\Big]_{x_0}^{x_1}. \tag{4.7}$$

L^*, Gl.(5), heißt der zu L, Gl.(3), **adjungierte Differentialoperator**. Wenn L mit L^* zusammenfllt, dann heißt der Differentialoperator **selbstadjungiert**. Dazu mssen die Koeffizientenfunktionen $a(x)$ und $b(x)$ die folgenden Bedingung erfllen:

$$L^* = L: \quad a' \;=\; b \;:= p'. \tag{4.8}$$

Diese folgt aus der Gleichsetzung $Lu = L^*u$ und dem Vergleich von (3) mit der zweiten Zeile von (5). Daher läßt sich der selbstadjungierte Operator L schreiben (mit $q := c$):

$$Lu \;=\; L^*u \;=\; (pu')' \;+\; qu. \tag{4.9}$$

Der Strom j ist dann:

$$j \;=\; vpu' \;-\; v'\,pu\;; \tag{4.10}$$

und der zugehörigen Greensche Satz ist symmetrisch

$$\int_{x_0}^{x_1} (v\; Lu \;-\; u\; Lv)\; dx \;=\; \Big[vpu' \;-\; v'pu\Big]_{x_0}^{x_1}. \tag{4.11}$$

Es zeigt sich, dass es wesentlich günstiger ist, mit selbstadjungierten Operatoren zu arbeiten. Daher ist es meist zweckmäßig, einen Differentialoperator, der diese Eigenschaft nicht hat, in einen äquivalenten selbstadjungierten zu transformatieren, Dafür gibt es mehrere Methoden. Eine davon ist: Ist der Operator $\bar{L}$, gegeben durch den Ausdruck (3), nicht selbstadjungiert, $L \neq L^*$, dann erhält man einen äquivalenten selbstadjungierten Ausdruck durch Multiplikation mit dem folgenden Faktor:

$$\rho \;=\; \exp\Big(\int^x \frac{b-a'}{a}\; d\bar{x}\Big). \tag{4.12}$$

Das ergibt den äquivalenen selbstadjungierten Differentialoperator L gemäß:

$$\rho\bar{L}u \;:=\; Lu, \qquad L^*u \;=\; Lu. \tag{4.13}$$

Denn aus

$$\begin{aligned} \rho\bar{L}u \quad &= \rho a u'' \;+\; \rho b u' \;+\; \rho c u \\ =\quad Lu \quad &= p u'' \;+\; p' u' \;+\; q u \end{aligned}$$

folgt durch Vergleich der Koeffizienten von u, u', u'':

$$\rho a \;=\; p, \qquad \rho b \;=\; p' \;=\; \rho' a \;+\; \rho a', \quad \Rightarrow \quad \rho' \;=\; \rho(b-a')/a,$$

eine Differentialgleichung für ρ; eine partikuläre Lösung derselben ist Gl.(12).

Z.B. ist der Operator der Besselschen Differentialgleichung (die man erhält, wenn man die 2-dimensionale Helmholtzgleichung $\Delta\psi \;+\; k^2\;\psi \;=\; 0$ in ebenen Polarkoordinaten durch Separation löst)

$$\bar{L}u \;=\; \frac{d^2u}{dr^2} \;+\; \frac{1}{r}\,\frac{du}{dr} \;-\; \frac{m^2u}{r^2} \;+\; k^2\; u$$

nicht selbstadjungiert:

$$a = 1, \quad a' = 0 \neq b = 1/r.$$

Gln.(12) bzw. (13) ergeben:

$$\begin{aligned} \rho \;&=\; e^{\ln r} = r. \\ \rho\bar{L}u \;&=\; r\,\frac{d^2u}{dr^2} \;+\; \frac{du}{dr} \;-\; \frac{m^2u}{r} \;+\; k^2\; ru && (4.14) \\ &=\; \frac{d}{dr}\Big(r\frac{du}{dr}\Big) \;-\; \frac{m^2u}{r} \;+\; k^2\; ru && (4.15) \\ Lu \;&=\; (pu')' \;+\; qu, \quad p' = r, \quad q \;=\; k^2r - m^2/r. && (4.16) \end{aligned}$$

4.2 Der Greensche Satz für n Variable

Es ist zweckmäßig, Indexschreibweise zu verwenden. Es gilt das Summationsübereinkommen, dass über wiederholte Indices von 1 bis n summiert werden soll. Der allgemeinste Differentialoperator zweiter Ordnung ist dann

$$Lu \;=\; a_{ij}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \;+\; b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \;+\; cu, \qquad a_{ij} \;=\; a_{ji}. \tag{4.17}$$

a_{ij}, b_i und c sind Funktionen der n Variablen x_k. a_{ij} muss symmetrisch sein, weil die Reihenfolge der Differentiationen keine Rolle spielen darf. Die Berechnu ng des adjungierten Operators geht genauso wie in Gl. (4) und gibt:

$$v\ Lu\ - u\ L^* v \ = \ \frac{\partial j_i}{\partial x_i} \ = \ div \vec{j} \tag{4.18}$$

mit dem adjungierten Operator L^* und dem Strom $\vec{j}$:

$$L^* u \quad = \quad \frac{\partial^2 (a_{ij} v)}{\partial x_i \partial x_j} \ - \ \frac{\partial (b_i v)}{\partial x_i} \ + \ cu, \tag{4.19}$$

$$\vec{j} = j_i \quad = \quad v\ a_{ij}\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \ - \ \frac{\partial (a_{ij} v)}{\partial x_j} \ + \ u b_i v. \tag{4.20}$$

Aus Gl.(17) erhält man den verallgemeinerten Greenschen Satz:

$$\int \int_{\mathcal{V}} \int (v\ Lu \ - \ u\ L^* v)\ d\mathcal{V} \ = \ \int \int_{\mathcal{F}} (\vec{n} \cdot \vec{j})\ d\mathcal{F}. \tag{4.21}$$

L ist selbstadjungiert, wenn

$$b_i \ = \ \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}. \tag{4.22}$$

Dann lauten der selbstadjungierte Differentialoperator und der zugehörige Strom:

$$L \ = \ L^* \quad = \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x_k)\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \ + \ cu, \tag{4.23}$$

$$\vec{j} \ = \ j_i \quad = \quad v\ a_{ij}\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \ - \ u\ a_{ij}\ \frac{\partial v}{\partial x_j}. \tag{4.24}$$

Als Anwendung betrachten wir die Elektrostatik mit einer ortabhängigen Dielektrizitätskonstanten $\varepsilon(\vec{r})$. Statt der Gleichungen (1.1) bis (1.4) kommt dann:

$$\mathrm{div}\Big(\varepsilon(\vec{r})\ \vec{(}E)\Big) \quad = \quad \rho(\vec{r}), \tag{4.25}$$

$$\vec{E} \quad = \quad -\ \mathrm{grad}\ \Phi, \tag{4.26}$$

$$\mathrm{div}\Big(\varepsilon(\vec{r})\ \mathrm{grad}\Phi\Big) \quad = \quad -\ \rho(\vec{r}). \tag{4.27}$$

Die Poissongleichung hat also schon selbadjungierte Form. Der lineare Differentialoperator L und der Strom $\vec{j}$ ergeben sich aus Gln.(23) und (24) mit $a_{ij}(x_k) \ = \ \varepsilon(\vec{r})\ \delta_{ij}$.

4.2.1 Selbstadjungiertheit der Radialgleichung in Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten r, θ, ϕ lautet die Helmholtzgleichung:

$$\Delta\psi \ + \ k^2\ \psi \ = \ \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \ + \ \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} \ + \ \frac{1}{r^2}\ \nabla^2_{\theta,\phi} \ + k^2 \right] \psi \ = \ 0. \tag{4.28}$$

Der Winkelanteil $\nabla^2_{\theta,\phi}$ ist durch

$$\nabla^2_{\theta,\phi}\psi := \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) \ + \ \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}$$

definiert und hat die Kugelflächenfunktionen $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ als Eigenfunktionen:

$$\nabla^2_{\theta,\phi}\ Y_{\ell,m} \ = \ -\ \ell(\ell+1)\ Y_{\ell,m}, \qquad \ell \in \mathbb{N}_0,\ m \in \mathbb{Z}\ \wedge\ -\ell \leq m \leq \ell.$$

Der Separationsansatz $\psi(r,\theta,\phi) = R(r)\, Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ führt zu folgender gewöhnlicher Differentialgleichung für den Radialanteil $R(r)$:

$$\bar{L}\; R \;=\; \left[\frac{d^2}{dr^2} \;+\; \frac{2}{r}\frac{d}{dr} \;-\; \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \;+\; k^2\right] R \;=\; 0. \tag{4.29}$$

$\bar{L}$ ist nicht selbstadjungiert. Doch

$$L \;=\; \rho\,\bar{L} \;=\; \rho\,\bar{L} \;=\; r^2\,\bar{L} \;=\; L^* \;=\; \left[\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) \;-\; \ell(\ell+1) \;+\; k^2\, r^2\right]$$

ist selbstadjugiert; der Faktor $\rho \;=\; r^2$ ist gleich dem Radialanteil im Volumselement dV :

$$dV \;=\; \underline{r^2}\; dr\; \sin\theta\; d\theta\; d\phi.$$

4.2.2 Selbstadjungiertheit der hypergeometrischen Differentialgleichung

Die hypergeometrische Differentialgleichung kann in eine selbstadjungierte verwandelt werden, indem man sie mit dem Faktor ρ multipliziert.

$$\bar{L}y \;=\; x\,(1-x)\; y'' \;+\; [c \;-\; (a+b+1)\; x]\; y' \;-\; a\; b\; y \;=\; 0; \tag{4.30}$$

$$\bar{L} \;\neq\; \bar{L}^*, \qquad L \;:=\rho\bar{L} \;=\; L^*; \qquad \rho \;=\; x^{c-1}\;(1-x)^{a+b-c}. \tag{4.31}$$

4.2.3 Eigenschaften von Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialoperatoren

Eigenfunktionen selbstadjungierter Differentialoperatoren mit homogenen Randbedingungen sind orthogonal, wenn deren Eigenwerte verschieden sind. Der Operator ist dann:

$$L\psi \;=\; (p\;\psi')' \;+\; q\;\psi \;+\; \lambda\;\psi \;=\; L_r\psi \;+\; \lambda\;\psi; \quad x\in[x_0,x_1],\; ' = \frac{d}{dx}.$$

An den Enden des Intervalls sind homogene Randbedingungen vorgeschrieben (alle a_i und b_i sind konstant):

$$x = x_0:\;\; \ell_0\psi = a_0\;\psi \;+\; b_0\;\psi' \;=\; 0; \quad x = x_1:\;\; \ell_1\psi = a_1\;\psi \;+\; b_1\;\psi' \;=\; 0.$$

Die Eigenwertgleichung wird für zwei Eigenwere λ_n und λ_k angeschrieben, mit der jeweils anderen Eigenfunktion multipliziert und davon die Differenz gebildet:

$$L_r\psi_n \;+\; \lambda_n\psi_n \;=\; 0 \;\Big|\cdot\psi_k \qquad\qquad L_r\psi_k \;+\; \lambda_k\psi_k \;=\; 0 \;\Big|\cdot\psi_n$$

$$\psi_k\; L_r\psi_n \;-\; \psi_n\; L_r\psi_k \;=\; -\;(\lambda_n-\lambda_k)\psi_n\;\psi_k\Big|\; \int_{x_0}^{x_1}\; dx$$

$$\begin{aligned}(\lambda_n-\lambda_k)\int_{x_0}^{x_1} dx\;\psi_n\;\psi_k \;&=\; \int_{x_0}^{x_1} dx\;\frac{d}{dx}\left[\psi_k\; p(x)\;\psi_n' \;-\; \psi_n\; p(x)\;\psi_k\;\right] \\ &=\; \left[p(x)(\psi_k\;\psi_n' \;-\; \psi_n\;\psi_k')\;\right]_{x_0}^{x_1} \;=\; 0.\end{aligned}$$

Die letzte Differenz ist Null wegen der obigen Randbedingungen.

4.3 Die Greenschen Sätze in Vektorform

Diese Form der Integralsätze wird bei der Behandlung von Vektorfeldern benötigt. Eine wichtige Anwendung finden diese bei den Maxwellschen Gleichungen. Wenn ein Feld (z.B. $\vec{H}$) mit harmonischer Zeithabhängigkeit ($e^{-i\omega t}$) aus einer Rotorgleichung berechnet und in die andere eingesetzt wird, ergibt sich (z.B.) die folgende Vektordifferentialgleichung (s. §1.6.1):

$$\mathrm{rotrot}\vec{E} \;-\; k^2\;\vec{E} \;=\; \vec{j}.$$

Der obige Differentialoperator tritt in the Volumsintegralen der unten angeführten Greenschen Sätze auf.

4.3.1 1. Greenscher Satz

Im Gaussschen Satz (4.1) wird eingesetzt:

$$\vec{a} \;=\; \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})$$

Dies gibt:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \Big(\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})\Big)\, d\mathcal{V} \;&=\; \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot \Big(\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B})\Big)\, d\mathcal{S} \;=\\ &=\; \iiint\limits_{\mathcal{V}} (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{B})\, d\mathcal{V} \;-\; \iiint\limits_{\mathcal{V}} \vec{A} \cdot \Big(\nabla \times (\nabla \times \vec{B})\Big)\, d\mathcal{V}.\end{aligned}$$

oder umgeschrieben:

$$\iiint\limits_{\mathcal{V}} (\mathrm{rot}\vec{A} \cdot \mathrm{rot}\vec{B})\, d\mathcal{V} \;-\; \iiint\limits_{\mathcal{V}} (\vec{A} \cdot \mathrm{rotrot}\vec{B})\, d\mathcal{V} \;=\; \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (\vec{A} \times \mathrm{rot}\vec{B})\, d\mathcal{S}$$

4.3.2 2. Greenscher Satz

In den beiden letzten Gleichungen werden $\vec{A}$ und $\vec{B}$ vertauscht; die resultierenden Ausdrücken werden von den ursprünglichen subtrahiert. Dies gibt

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\mathcal{V}} \vec{B} \cdot \Big(\nabla \times (\nabla \times \vec{A})\Big)\, d\mathcal{V} \quad-\quad \iiint\limits_{\mathcal{V}} \vec{A} \cdot \Big(\nabla \times (\nabla \times \vec{B})\Big)\, d\mathcal{V} \;&=\\ =\iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot \Big(\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \;-\; \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})\Big)\, d\mathcal{S}&\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\mathcal{V}} \Big(\vec{B} \cdot \mathrm{rotrot}\vec{A} \;-\; \vec{A} \cdot \mathrm{rotrot}\vec{B}\Big)\, d\mathcal{V} \;&=\; \iint\limits_{\mathcal{S}} \vec{n} \cdot (\vec{A} \times \mathrm{rot}\vec{B} \;-\; \vec{B} \times \mathrm{rot}\vec{A})\, d\mathcal{S}\\ &=\; \iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(\vec{B} \cdot (\vec{n} \times \mathrm{rot}\vec{A}) \;-\; \vec{A} \cdot (\vec{n} \times \mathrm{rot}\vec{B})\Big)\, d\mathcal{S} \;=\\ &=\; \iint\limits_{\mathcal{S}} \Big((\vec{n} \times \vec{A}) \cdot \mathrm{rot}\vec{B} \;-\; (\vec{n} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{rot}\vec{A}\Big)\, d\mathcal{S}.\end{aligned}$$

4.4 Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie den Faktor ρ, der den Operator $\bar{L}$ des Radialanteils der dreideimensionalen Helmholtzgleichung (4.28) in einen selbstadjungierten verwandelt.

2. Berechnen Sie:
   a) den adjungierten Operator und den Strom für den Operator der hypergeometrischen Differentialgleichung (4.30).
   b) den Faktor ρ, der den Operator $\bar{L}$ dieser Differentialgleichung (4.30) in einen selbstadjungierten verwandelt.

3. Betrachten Sie die Rotorgleichungen (= RoGl) der Maxwellschen Gleichungen. Die Permitivität (= Dielekrizitätskonstante) und die Permeabilität sind Funktionen des Ortes. Gewinnen Sie aus den RoGln Vektordifferentialgleichungen zweiter Ordnung, indem Sie entweder das elektrische oder das magnetische Feld eliminieren. Untersuchen Sie, ob die entsprechenden Differentialoperatoren selbstadjungiert sind.