Kapitel 7

Die Separierbarkeit der skalaren Helmholtz- und Potentialgleichung

7.1 Die Separierbarkeit der zweidimensionalen Helmholtzgleichung

In MF, S..498 - 504, wird untersucht, in welchen krummlinigien Koordinaten u_1, u_2 die Helmholtzgleichung

$$\Delta\psi \ + \ k^2 \ \psi(u_1, u_2) \ = \ 0 \tag{7.1}$$

durch einen Ansatz

$$\psi(u_1, u_2) \ := \ U_1(u_1) \ \ U_2(u_2)) \tag{7.2}$$

in zwei gewöhnliche Differentialgleichen je einer der Koordinaten u_1 und u_2 separiert werden kann. Es kommt heraus, dass sich hiefür 4 Koordinatensysteme eignen:

1. Kartesische Koordinaten x, y : $\quad -\infty \leq x \leq \infty, \quad -\infty \leq y \leq \infty;$
2. Parabolische Koordinaten μ, ν : $\quad 0 \leq \mu \leq \infty, \quad -\infty \leq \nu \leq \infty;$
3. Polarkoordinaten r, ϕ : $\quad 0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi;$
4. Elliptische Koordinaten η, ψ : $\quad 0 \leq \eta \leq \infty, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$

Alle Koordinatenkuven sind konfokale Kegelschnittkurven einschließlich deren Entartungen wie Kreise und Gerade.

7.2 Die Separierbarkeit der zweidimensionalen Potentialgleichung

Die zweidimensionale Potentialgleichung ist in kartesischen Koordinaten separabel. Bei einer konformen Abbildung erhält man daraus wieder ein orthogonales Koordinatensystem mit einer separablen Form des Laplaceoperators. Daher gibt es unendlich viele orthogonale Koordinatensystem, in denen die Potentialgleichung separiert werden kann.

7.3 Die Separierbarkeit der dreidimensionalen Helmholtzgleichung

In MF, S..508 - 516, wird untersucht, in welchen krummlinigen Koordinaten u_1, u_2, u_3 die Helmholtzgleichung

$$\Delta\psi \ + \ k^2 \ \psi(u_1, u_2, u_3) \ = \ 0 \tag{7.3}$$

durch einen Ansatz

$$\psi(u_1, u_2, u_3) \ := \ U_1(u_1) \ \ U_2(u_2) \ U_3(u_3) \tag{7.4}$$

in drei gewöhnliche Differentialgleichen je einer der Koordinaten u_1, u_2 und u_3 separiert werden kann. Hiebei wird insbesondee untersucht, welche analytische Form die metrischen Koeffizienten $h_\alpha(u_1, u_2, u_3)$, Gl.(6.27), haben müssen, damit dies möglich ist. Es kommt heraus, dass die Koordinatenflächen u_1 =const., u_2 =const. und u_3 =const. konfokale Kegelschnittsflächen sein müssen. Dies ist bei den folgenden 11 Koordinatensystemen der Fall.
A 4 Systeme entstehen aus den im vorhergehenden Paragraphen aufgeführten ebenen Koordinaten durch Hinzufügen der kartesischen z-Koordinate mit dem Variationsbereich $[-\infty, \infty]$

1. Kartesische Koordinaten x, y, z
2. (Kreis) Zylinderkoordinaten r, ϕ, z
3. Elliptische Zylinderkoordinaten η, ψ, z
4. Parabolische Zylinderkoordinaten μ, ν, z

B 4 Systeme entstehen aus den im vorhergehenden Paragraphen aufgeführten ebenen Koordinaten durch Drehung um eine der Koordinatenachsen (wobei zum Teil die neuen Variablen andere Namen und Definitionsbereiche erhalten)

1. Kugelkoordinaten r, θ, ϕ:
   entstehen aus den ebenen Polarkoordinaten durch Drehung um die y-Achse ;
2. Verlängerte rotationselliptische Koordinaten $\eta.\theta, \phi$:
   entstehen aus den ebenen elliptischen Koordinaten durch Drehung um die x-Achse ;
3. Abgplattete rotationselliptische Koordinaten η, θ, ϕ:
   entstehen aus den ebenen elliptischen Koordinaten durch Drehung um die y-Achse;
4. Rotationsparabolische Koordinaten μ, ν, ϕ :
   entstehen aus den ebenen parabolischen Koordinaten durch Drehung um die y-Achse.

C 3 Systeme sind vollständige Neubildungen:

1. Elliptischen Kegelkoordinaten r, θ, λ;
2. Paraboloidale Koordinaten μ, ν, λ;
3. Allgemeine elliptische Koordinaten μ, ν, λ;

Die dreidimensionale Helmholtzgleichung ist nicht separabel in den

1. Lokalen Toruskoordinaten ρ, θ, ϕ;
   Sie gehen aus den exzentrischen ebenen Polarkoordinaten durch Rotation um die y-Achse hervor. Sie spielen eine grosse Role bei der Behandlung der Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in gekrümmten Hohlleitern, s. die Monographie von Chang et.al. in den Referenzen des vorhergehenden Kapitels.

7.4 Die Separierbarkeit der dreidimensionalen Potentialgleichung

Die dreidimensionale Laplacegleichung kann in denselben 11 Koordinatensystemen, die im vorhergehenden Paragraphen aufgelistet worden sind, separiert werden.

7.5 Die R-Separierbarkeit der dreidimensionalen Potentialgleichung

Ausserdem gibt es weitere Systeme, in denen die Laplacegleichung R-separabel ist. Das bedeutet, dass die Gleichung $\Delta\psi(u_1, u_2, u_3) \;=\; 0$ durch einen Ansatz des folgenden Typs separiert werden kann:

$$\psi(u_1, u_2, u_3) \;:=\; U_1(u_1)\;\; U_2(u_2)\; U_3(u_3)/R(u_1, u_2, u_3) \tag{7.5}$$

Beispiele solcher Koordinaten sind die folgenden 3 Systeme, die in dem *Mathematica* Package "Calculus‘VectorAnalysis‘" implementiert sind;

1. Bipolarkoordinaten η, θ, z:
   Sie gehen aus den ebenen Bipolarkoordinaten durch Hinzufügen der kartesischen Koordinate z hervor.

2. Bisphärische Koordinaten η, θ, ϕ:
   Sie gehen aus den ebenen Bipolarkoordinaten durch Rotation um die x-Achse hervor.

3. Toruskoordinaten η, θ, ϕ:
   Sie gehen aus den ebenen Bipolarkoordinaten durch Rotation um die y-Achse hervor.

Weitere Bespiele R-separabler Systeme findet man in Moon und Spencer, s. Referenzen am Ende des vorhergehenden Kapitels.

7.6 Bildtafel der separablen Systeme

s. eigenes A3-Blatt.

7.7 Curvilinear Systems Implemented in the *Mathematica* package " VectorAnalysis'"

Tabelle 7.1: Curvilinear Systems Implemented in the *Mathematica* package "Calculus'VectorAnalysis'"

System	MF Nr	MF p	MS Nr	Sep.	MaxSep	*Mathematica* command
Bipolar			Fig.2.09	RS		SetCoordinates[Bipolar[u,v,z,a]]
Bispherical		665	T4.03	RS		SetCoordinates[Bispherical[θ, η, ψ,a]]
Cartesian	I	656	T1.01	HS	MC	SetCoordinates[Cartesian[x,y,z]]
ConfocalEllipsoidal	X	663	T1.10	HS		??
Confocal Paraboloidal	XI	664	T1.11	HS		??
Conical	VI	659	T1.09	HS	MR	SetCoordinates[Conical[r,θ, λ,b,c]]
Cylindrical	II	656	T1.02	HS	MC	SetCoordinates[Cylindrical[r,ψ,z]]
EllipticCylindrical	III	657	T1.03	HS	MC	SetCoordinates[EllipticCylindrical[η, ψ,z,a]]
OblateSpheroidal	IX	662	T1.07	HS		SetCoordinates[OblateSpheroidal[$\theta + \frac{\pi}{2}, \eta, \psi$,a]]
ParabolicCylindrical	IV	658	T1.04	HS	MC	SetCoordinates[ParabolicCylindrical[μ, ν,z]]
Paraboloidal	VII	660	T1.08	HS		SetCoordinates[Paraboloidal[μ, ν, ψ]]
ProlateSpheroidal	VIII	661	T1.06	HS		SetCoordinates[ProlateSpheroidal[η, θ, ψ,a]]
Spherical	V	658	T1.02	HS	MR	SetCoordinates[Spherical[r,θ, ψ]]
Toroidal		666	T4.03	RS		SetCoordinates[Toroidal[η, θ, ψ,a]]

Abbreviations used in the table above:
MF = Morse, Feshbach: Methods of Theoretical Physics, s. s. referemces of preceeding chapter.
MF Nr. in Roman numerals gives the number in the list of coordinate systems provided in MF.
MF p gives the page of MF, where this system is treated.
MS = Moon, Spencer: Field Theory Handbook, s. referemces of preceeding chapter.
Tn.k gives the number of the corresponding table in MS. The arguments in SetCoordinates[] above have been chosen such that the formulas are obtained as given in MS.
HS = In this system the 3D Hemholtz, so also the 3D potential equation, can be solved by separation of variables.
RS = The potential equation is R-separable in this system.
MC = In this coordinate system the Maxwell curl equations can be solved by one component electric or magnetic Hertz vectors aligned with the generators of the cylindrical coordinate surfaces. The corresponding solutions are given by the vector fields **L, M, N** (s.§21.2.1).
MR = In these two coordinate system the Maxwell curl equations can be solved by one component electric or magnetic Hertz vectors pointing into the radial direction. The corresponding solutions are given by the vector fields **L, M, N** (s.§21.2.2).